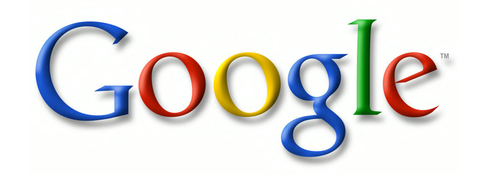
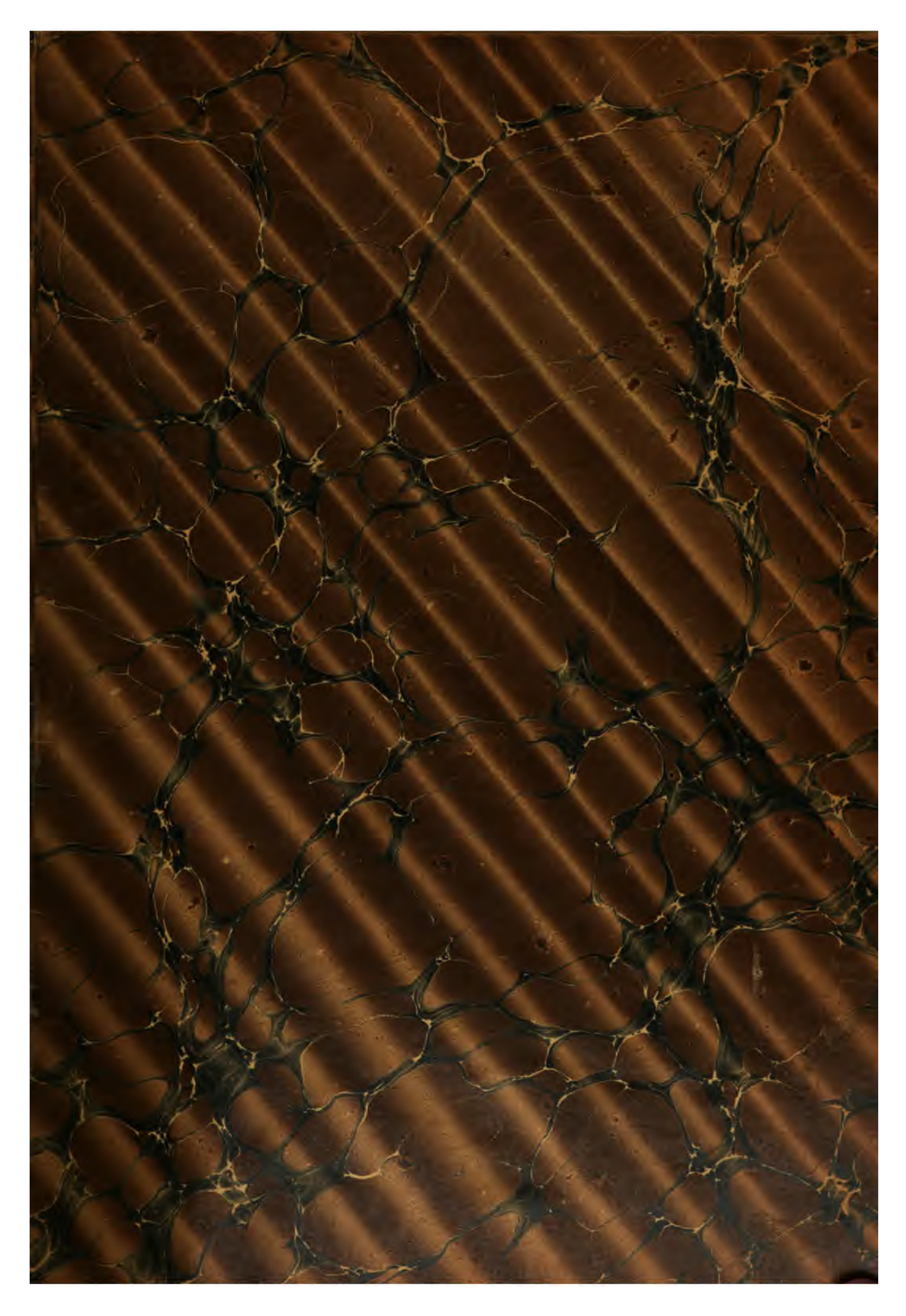




SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS



VALEUR APPROXIMATIVE

D'UNE

INTÉGRALE DÉFINIE

PAR

B. P. MOORS
Inspecteur du service des poids et mesures dans les Pays-Bas

PARIS,
GAUTHIER—VILLARS, IMPRIMEUR—LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

VALEUR APPROXIMATIVE
D'UNE
INTÉGRALE DÉFINIE.

TABLES:

INTRODUCTION.

Du calcul de la valeur approximative d'une intégrale définie.

§ 1. Souvent il est nécessaire, par exemple dans des questions de physique et de mécanique, de déterminer la valeur d'une intégrale $\int f(x)\,dx$, prise entre les limites finies $x = b$ et $x = a$.

Cependant, dans la plupart des cas qui se présentent, l'intégration échappe à toutes les tentatives directes, ce qui a fait chercher des moyens pour suppléer à l'imperfection ou au manque absolu de méthodes rigoureuses. Un de ces moyens consiste à développer $f(x)$ suivant une série convergente, afin de pouvoir exprimer de même la valeur de $\int f(x)\,dx$ dans une telle série. Plus tôt cette série converge entre les limites b et a, moins on aura de termes à calculer pour déterminer, avec un degré d'exactitude suffisant, la valeur cherchée de l'intégrale.

Si l'intégrale dont il s'agit peut être exprimée assez facilement par une série convergente, la solution est aussi complète qu'on peut la désirer; mais parfois on a des expressions tellement compliquées, qu'il est très difficile — quoique toujours possible — de les développer dans des séries convergentes. De plus, aussi souvent que les limites de l'intégrale ne permettent pas de borner la série à un petit nombre de termes, l'intégration par une série exige toujours des calculs qui prennent beaucoup de temps et donnent facilement lieu à des erreurs.

Pour cette raison, il faut considérer comme un avantage précieux de pouvoir se servir de formules d'approximation

nous mettant en état d'éviter totalement l'intégration dans le sens propre du mot et d'évaluer la valeur de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ aussi exactement que nous le désirons, sans avoir besoin de développer $f(x)$ dans une série.

Valeur approximative d'une intégrale définie représentée par l'aire d'une figure plane.

§ 2. On peut représenter la valeur d'une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ par l'aire de la figure plane $A'ABB'$, fig. 1, limitée par l'axe X, les ordonnées qui appartiennent aux abscisses $O'B' = b$ et $O'A' = a$ et la courbe AB (*a*), dont l'équation par rapport aux axes des coordonnées, perpendiculaires entre eux, $O'X$ et $O'Y$, est désignée par

$$y = f(x),$$

à condition que $f(x)$ garde sa continuité entre les limites $x = a$ et $x = b$.

Cette observation conduit d'elle-même à l'idée de trouver, au moyen de la division de la figure curviligne par des ordonnées interposées, un expédient pour calculer une aire approximative de la figure et par conséquent une valeur approximative de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$.

Méthode des **trapèzes.**

§ 3. Divisons la base de la figure, c'est à dire la distance $b - a = H$, en $(n - 1)$ parties égales à h et calculons de l'équation $y = f(x)$ les valeurs des n ordonnées

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots\ y_{n-1},\ y_n$$

(*a*) Toutes les fois que, dans cette étude, nous parlons de la „courbe A B", nous avons uniquement en vue la portion de la courbe située entre les ordonnées extrêmes A' A et B' B de la figure.

Les notes suivantes sont placées à la suite de l'étude. Un petit chiffre dans le texte correspond avec celui de la note.

qui correspondent aux abscisses

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots\ a+(n-2)h,\ a+(n-1)h;$$

considérons ensuite chaque bande de la figure se trouvant entre deux ordonnées consécutives comme un trapèze rectangulaire et par conséquent la courbe limite AB comme une ligne brisée qui se forme quand on relie par une ligne droite les sommets de chaque couple d'ordonnées consécutives; il s'ensuit qu'une valeur approchée I de l'aire curviligne, ou, ce qui revient au même, une valeur approchée de l'intégrale, est représentée par la formule

$$I = h\left\{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right\} =$$
$$= h\left\{\frac{y_1+y_n}{2}+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

qui renferme la règle suivante:

Prenez la demi-somme des deux ordonnées extrêmes de la figure et ajoutez-y la somme des $(n-2)$ ordonnées interposées; le total multiplié par la distance h entre deux ordonnées qui suivent immédiatement, donnera une valeur approximative I de l'aire limitée par la courbe.

En général l'exactitude de la formule (1) augmente avec n, c'est à dire avec le nombre des ordonnées à mesurer.

Il est évident,

1° que, pour une courbe AB qui oppose continuellement à l'axe X son côté convexe ou continuellement son côté concave, la formule (1) indiquera, dans le premier cas, une aire trop grande, dans le second cas, une aire trop petite, et

2° que, pour le cas où l'on désire une grande exactitude, on peut seulement se servir de la formule a quand chaque partie de la courbe AB, entre les ordonnées y_p et y_{p+1}, diffère très peu d'une ligne droite et b, dans le cas que les ordonnées croissent et décroissent régulièrement, quand les sommets A, C, , . . ., fig. 1, des ordonnées à mesurer coïncident également avec les points maxima et minima de la courbe.

Méthode des **paraboles passant par les sommets de trois ordonnées** (*Formule de* **Simpson**).

§ 4. On démontrera, e. a., dans le § 8 ci-après, que, de la manière suivante, on obtient pour I une expression qui est plus exacte que celle sub (1).

On divise la base $A' B'$ de la figure en $2m$ parties égales à h, par conséquent la figure entière en un nombre pair $2m$ de bandes et l'on remplace chaque partie de la courbe AB qui se trouve entre les ordonnées y_{2p+1} et y_{2p+3} par une parabole du second degré tracée par les sommets des trois ordonnées y_{2p+1}, y_{2p+2} et y_{2p+3} et dont l'axe est parallèle à l'axe Y.

Pour déterminer l'aire approximative des deux bandes de la figure qui se trouvent entre les ordonnées y_1 et y_3, on trace la corde $A\,C$. Soit i_1 l'aire approximative de la première bande, i_2 celle de la seconde, alors $i_1 + i_2$ est égal à l'aire du trapèze $A'\,C = h\,(y_1 + y_3)$ augmenté de l'aire du segment parabolique $A\,C = \frac{2}{3}\,h\,(2\,y_2 - y_1 - y_3)$; donc

$$i_1 + i_2 = \frac{h}{3}\,\{y_1 + 4\,y_2 + y_3\}.$$

De la même manière on trouve pour les aires approximatives des bandes suivantes:

$$i_3 + i_4 = \frac{h}{3}\,\{y_3 + 4\,y_4 + y_5\};$$

. . . .

$$i_{2m-1} + i_{2m} = \frac{h}{3}\,\{y_{2m-1} + 4\,y_{2m} + y_{2m+1}\}.$$

En additionnant les aires de toutes les bandes on obtient pour l'aire approximative I de la figure entière,

$$I = \frac{h}{3}\,\{(y_1 + y_{2m+1}) + 2\,(y_3 + y_5 + \dots + y_{2m-1}) + $$
$$+ 4\,(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m})\} = \frac{H}{6\,m}\,\{(y_1 + y_{2m+1}) +$$
$$+ 2\,(y_3 + y_5 + \dots + y_{2m-1}) + 4\,(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m})\} \quad (2)$$

Cette formule, appelée formule de Simpson, est, dans la

pratique, d'une application fréquente, surtout quand il s'agit de calculer l'aire de figures planes limitées par des lignes courbes, ou le volume de solides terminés par des surfaces courbes. On en déduit la règle suivante:

Additionnez: la somme des deux ordonnées extrêmes de la figure, la somme double des ordonnées interposées avec les indices **impairs** et le quadruple de la somme des ordonnées interposées avec les indices **pairs**. Le produit de ce total par le tiers de la distance entre deux ordonnées consécutives produira une valeur approximative de l'aire limitée par la courbe AB.

Méthode des **paraboles passant par les sommets de plus de trois ordonnées.**

§ 5. Au lieu d'être une ligne brisée, comme dans le § 3, ou de se composer d'une série de portions de paraboles du second degré, comme dans le § 4, la ligne remplaçante peut être composée aussi d'une série de portions de paraboles du troisième, du quatrième degré, etc. Cependant, de cette manière on n'arrive jamais à une exactitude aussi grande que quand on remplace, comme nous le ferons dans la suite, la vraie courbe limite par une seule ligne parabolique tracée par tous les points connus de la courbe. Le nombre de ces points peut être tel que les deux lignes limites se rapprochent sur toute leur étendue de si près que l'aire inscrite dans la ligne parabolique diffère moins de l'aire vraie de la figure que la grandeur qui peut être négligée.

Termes de correction.

§ 6. Il est facile de calculer la différence entre une aire approximative I, désignée sub (1) ou sub (2) et l'aire exacte de la figure.

A ce sujet, nous observons que, sans préjudice de la généralité de la question que nous traiterons dans cette étude,

nous pouvons supposer que là où commence l'aire cherchée se trouve aussi l'origine des abscisses.

Soit donc l'équation de la courbe AB, fig. 1, par rapport aux axes des coordonnées perpendiculaires entre eux, $A'X$ et $A'Y''$, représentée par $y = f(x)$.

Chaque fonction de x peut être développée dans une série convergente qui ne contient que des termes avec des puissances entières de x (y compris la puissance zéro), à condition que la fonction de x, ainsi que les dérivées d'ordres divers, soient continues entre o et x.

Dans cette étude, nous supposerons, non seulement que la fonction qui représente l'équation de la courbe AB, satisfait à la susdite condition, mais encore que la série qui peut la remplacer est tellement convergente qu'un nombre de termes relativement faible suffit pour représenter la fonction sans erreur notable. Dans ce cas, il sera toujours possible de calculer, par les formules que nous allons développer, l'aire de la figure avec une exactitude aussi grande que l'on voudra. Nous représenterons l'aire exacte de la figure ou une aire à peu près parfaitement exacte par I', i', i'_n, etc. (avec un accent) et une aire moins exacte, c'est à dire une aire approximative de la figure, respectivement par I, i, i_n, etc. (sans accent).

Si au contraire la courbe AB ne satisfait pas à la condition mentionnée ci-dessus, c'est à dire si p. e. la courbure de la courbe éprouve quelque part une variation assez brusque pour qu'une dérivée devienne infinie, les formules d'approximation seront encore applicables, mais seulement pour les parties de la fonction dans lesquelles il ne se présente pas de variation brusque.

Soit donc l'équation de la courbe représentée avec une exactitude illimitée par la série convergente

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \text{etc.} \ldots \quad (3)$$

Soit la base de la figure $A'B' = H$ divisée en $(n-1)$ parties égales à h et soient des ordonnées, dont les longueurs $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ sont supposées connues, élevées sur les points de division, de même que sur les points extrêmes A' et B'.

L'aire approximative i_p de la $p^{\text{ième}}$ bande, c'est à dire de la bande située entre les ordonnées y_p et y_{p+1} est égale à $\frac{1}{2} h (y_p + y_{p+1})$, ou parce que

$$y_p = A_0 + A_1 (p-1) h + A_2 (p-1)^2 h^2 + A_3 (p-1)^3 h^3 + \text{etc.}$$

et

$$y_{p+1} = A_0 + A_1 p h + A_2 p^2 h^2 + A_3 p^3 h^3 + \text{etc.}$$

on a

$$\frac{1}{2} h (y_p + y_{p+1}) =$$

$$= A_0 h + \frac{1}{2} A_1 \{(p-1) + p\} h^2 + \frac{1}{2} A_2 \{(p-1)^2 + p^2\} h^3 +$$
$$+ \frac{1}{2} A_3 \{(p-1)^3 + p^3\} h^4 + \frac{1}{2} A_4 \{(p-1)^4 + p^4\} h^5 + \text{etc.}$$

L'aire parfaitement exacte i'_p de la bande est

$$i'_p = \int_{(p-1)h}^{ph} \{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \text{etc.}\} dx =$$

$$= A_0 h + \frac{1}{2} A_1 \{(ph)^2 - (p-1)^2 h^2\} + \frac{1}{3} A_2 \{(ph)^3 - (p-1)^3 h^3\} +$$
$$+ \frac{1}{4} A_3 \{(ph)^4 - (p-1)^4 h^4\} + \frac{1}{5} A_4 \{(ph)^5 - (p-1)^5 h^5\} + \text{etc.}$$

par conséquent

$$i'_p = \frac{1}{2} h (y_p + y_{p+1}) +$$
$$+ A_2 h^3 \left[\frac{1}{3} \{p^3 - (p-1)^3\} - \frac{1}{2} \{p^2 + (p-1)^2\}\right] +$$
$$+ A_3 h^4 \left[\frac{1}{4} \{p^4 - (p-1)^4\} - \frac{1}{2} \{p^3 + (p-1)^3\}\right] +$$
$$+ A_4 h^5 \left[\frac{1}{5} \{p^5 - (p-1)^5\} - \frac{1}{2} \{p^4 + (p-1)^4\}\right] + \text{etc.}$$

Quand, dans la dernière égalité, on pose successivement $p = 1, 2, 3, \ldots (n-1)$, on trouve l'aire exacte $i'_1, i'_2, i'_3, \ldots i'_{n-1}$ de chaque bande en particulier, et, en additionnant toutes ces aires, l'aire exacte I' de la figure entière. Après quelques calculs on trouve:

$$I' = i''_1 + i''_2 + i''_3 + \ldots + i''_{n-1} = \frac{1}{2} h \{y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\} +$$
$$+ A_2 h^3 \left\{(n-1)^2 \left[\frac{1}{3}(n-1) - \frac{1}{2}\right] - \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2\right]\right\} +$$
$$+ A_3 h^4 \left\{(n-1)^3 \left[\frac{1}{4}(n-1) - \frac{1}{2}\right] - \left[1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-2)^3\right]\right\} +$$
$$+ A_4 h^5 \left\{(n-1)^4 \left[\frac{1}{5}(n-1) - \frac{1}{2}\right] - \left[1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-2)^4\right]\right\} + \text{etc.}$$

d'où ①

$$I' = \frac{H}{n-1} \left\{\frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right\} -$$
$$- \frac{1}{6(n-1)^2} A_2 H^3 - \frac{1}{4(n-1)^2} A_3 H^4 - \frac{10n^2 - 20n + 9}{30(n-1)^4} A_4 H^5 -$$
$$- \frac{5n^2 - 10n + 4}{12(n-1)^4} A_5 H^6 - \frac{21n^4 - 84n^3 + 119n^2 - 70n + 15}{42(n-1)^6} A_6 H^7 -$$
$$- \frac{14n^4 - 56n^3 + 77n^2 - 42n + 9}{24(n-1)^6} A_7 H^8 - \text{etc.} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Si l'on supprime, dans le second membre de (4), tous les termes qui suivent le premier, il reste la formule (1). Ainsi la différence entre l'aire exacte I' de la figure sub (4) et l'aire approximative I sub (1) est désignée par la somme de tous les termes qui dans le second membre de (4) suivent le premier terme. Dorénavant nous appellerons la somme des termes qni représentent la différence $I' - I$ la correction de I, ou simplement c o r r:.

§ 7. On peut, au moyen de (4), composer une formule d'approximation qui, pour un nombre égal d'ordonnées, est plus exacte que celle sub (1).

En effet, quand on détermine l'aire exacte de la figure, dans la supposition que seulement les deux ordonnées extrêmes de la figure sont connues, on a d'après (4), n étant alors égal à 2:

$$I' = H \frac{y_1 + y_n}{2} - \frac{1}{6} A_2 H^3 - \frac{1}{4} A_3 H^4 - \frac{3}{10} A_4 H^5 - \frac{1}{3} A_5 H^6 - \ldots.$$

En soustrayant cette expression de $(n-1)^2$ fois (4), on trouve, après quelques calculs:

$$I' = \frac{H}{2n(n-2)}\{(n-2)(y_1+y_n)+2(n-1)(y_2+y_3+$$

$$+y_4+\ldots+y_{n-1})-\frac{1}{30(n-1)^2}A_4H^5-\frac{1}{12(n-1)^2}A_5H^6-. \quad (5)$$

Puisqu'en (5) le terme avec A_2 ne paraît plus, le premier terme du second membre de (5) donnera une valeur I plus exacte que le premier terme du second membre de (4), c'est à dire que l'expression sub (1).

§ 8. Si encore, comme dans le § 4, la figure est divisée en un nombre pair de bandes et si l'on trace une parabole du second degré par les sommets du groupe d'ordonnées y_{2p+1}, y_{2p+2} et y_{2p+3}, on trouve

$$y_{2p+1} = A_0 + A_1(2p)h + A_2(2p)^2h^2 + A_3(2p)^3h^3 + \ldots$$
$$y_{2p+2} = A_0 + A_1(2p+1)h + A_2(2p+1)^2h^2 + A_3(2p+1)^3h^3 + \ldots$$
$$y_{2p+3} = A_0 + A_1(2p+2)h + A_2(2p+2)^2h^2 + A_3(2p+2)^3h^3 + \ldots$$

et, par conséquent, d'après (2), pour l'aire approximative des deux bandes réunies situées entre les ordonnées y_{2p+1} et y_{2p+3}

$$i_{2p+1} + i_{2p+2} = \frac{h}{3}(y_{2p+1} + 4y_{2p+2} + y_{2p+3}) =$$

$$= \frac{h}{3}\left\{\begin{array}{l} A_0 + A_1(2p)h + A_2(2p)^2h^2 + A_3(2p)^3h^3 + \ldots \\ 4A_0 + 4A_1(2p+1)h + 4A_2(2p+1)^2h^2 + 4A_3(2p+1)^3h^3 + \ldots \\ A_0 + A_1(2p+2)h + A_2(2p+2)^2h^2 + A_3(2p+2)^3h^3 + \ldots \end{array}\right\} =$$

$$= 2A_0h + 2(2p+1)A_1h^2 + \frac{1}{3}\Big[(2p)^2 + 4(2p+1)^2 + (2p+2)^2\Big]A_2h^3 + \ldots$$

tandis que l'aire exacte de ces deux bandes est exprimée par

$$i'_{2p+1} + i'_{2p+2} = 2A_0h + 2(2p+1)A_1h^2 + \frac{1}{3}\Big[(2p+2)^3 - (2p)^3\Big]A_2h^3 + \ldots$$

ainsi cette aire exacte est égale à

$$i'_{2p+1} + i'_{2p+2} = \frac{h}{3}(y_{2p+1} + 4y_{2p+2} + y_{2p+3}) +$$

$$+\left[\frac{1}{3}\Big\{(2p+2)^3-(2p)^3\Big\} - \frac{1}{3}\Big\{(2p)^2+4(2p+1)^2+(2p+2)^2\Big\}\right]A_2h^3 +$$

$$+\left[\frac{1}{4}\Big\{(2p+2)^4-(2p)^4\Big\} - \frac{1}{3}\Big\{(2p)^3+4(2p+1)^3+(2p+2)^3\Big\}\right]A_3h^4 + \text{etc.}$$

En posant ici $p = 0$, 1, 2, etc., on trouve successivement la somme des aires de la première et de la deuxième bande; la somme des aires de la troisième et de la quatrième bande;

etc. La somme de toutes ces aires nous fait connaître l'aire I' de la figure entière, notamment:

$$I'=\frac{h}{3}\left\{(y_1+y_{2m+1})+2(y_3+y_5+\ldots+y_{2m-1})+4(y_2+y_4+\ldots+ +y_{2m})\right\}-\frac{2}{15(2m)^4}A_4H^5-\frac{1}{3(2m)^4}A_5H^6-\ldots\ldots$$

Ici nous pouvons faire une remarque analogue à celle à la fin du § 7.

§ 9. On peut encore tirer de (4) une formule, dans laquelle les termes qui sont affectés de A_4 et A_5 ne paraissent plus.

Supposons, par exemple, que la figure est divisée en quatre bandes de même largeur et que les ordonnées extrêmes y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5 de ces bandes sont connues, nous trouvons d'après (4):

si seulement les ordonnées extrêmes de la figure sont mises en compte, puisque alors $n=2$,

$$I'=H\frac{y_1+y_5}{2}-\frac{1}{6}A_2H^3-\frac{1}{4}A_3H^4-\frac{3}{10}A_4H^5-\frac{1}{3}A_5H^6-\frac{5}{14}A_6H^7-\frac{3}{8}A_7H^8-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

pour les trois ordonnées y_1, y_3 et y_5, on a $n=3$ et

$$I'=\frac{H}{2}\left\{\frac{y_1+y_5}{2}+y_3\right\}-\frac{1}{24}A_2H^3-\frac{1}{16}A_3H^4-\frac{3}{160}A_4H^5-\frac{19}{192}A_5H^6-\frac{103}{896}A_6H^7-\frac{33}{256}A_7H^8-\ldots\ldots(7)$$

et pour les cinq ordonnées, $n=5$ et

$$I'=\frac{H}{4}\left\{\frac{y_1+y_5}{2}+y_2+y_3+y_4\right\}-\frac{1}{96}A_2H^3-\frac{1}{64}A_3H^4-\frac{53}{2560}A_4H^5-\frac{79}{3072}A_5H^6-\frac{1755}{57344}A_6H^7-\frac{579}{16384}A_7H^8-(8)$$

En soustrayant (6) de 4 fois (7) et de 16 fois (8), on trouve après quelques calculs,

$$I'=\frac{H}{6}(y_1+4y_3+y_5)-\frac{1}{120}A_4H^5-\frac{1}{48}A_5H^6-\frac{23}{672}A_6H^7-\frac{3}{64}A_7H^8-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

et

$$15\,I' = H\left\{\frac{3}{2}y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 4y_4 + \frac{3}{2}y_5\right\} - \frac{1}{32}A_4H^5 -$$

$$-\frac{5}{64}A_5H^6 - \frac{475}{3584}A_6H^7 - \frac{195}{1024}A_7H^8 - \ldots\ldots (10)$$

En soustrayant ensuite 120 fois (9) de 32 fois (10) on trouve, après réduction,

$$I' = \frac{H}{90}\left\{7(y_1+y_5) + 32(y_2+y_4) + 12y_3\right\} - \frac{1}{2688}A_6H^7 -$$

$$-\frac{1}{768}A_7H^8 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

On voit qu'en (9) non seulement les termes avec A_2 et A_3 ne se trouvent plus, mais qu'en outre les termes homonymes de correction y sont plus petits que ceux dans la formule (7), qui correspond avec la formule (1) pour 3 ordonnées à mesurer. Ensuite qu'en supprimant tous les termes de correction l'expression pour I sub (11) est beaucoup plus exacte que celle sub (8), c'est à dire que celle sub (1) pour $n = 5$.

§ 10. De pareille manière on pourrait développer des formules d'approximation pour $n = 4$, 6, 7, etc. dans la supposition que les ordonnées à mesurer y_p et y_{p+1} suivent successivement à des distances égales. Nous trouverons toujours pour I une expression de la forme

$$I = H\{\beta_1(y_1+y_n) + \beta_2(y_2+y_{n-1}) + \beta_3(y_3+y_{n-2}) + \text{etc.}\}$$

dans laquelle β_1, β_2, β_3, etc. sont des coefficients numériques.

Dans la première partie de cette étude, nous traiterons d'une méthode directe et générale pour évaluer les valeurs de β_p.

Application des termes de correction.

§ 11. Pour faire connaître par un exemple l'emploi des termes de correction, nous nous proposons d'appliquer ces termes à l'approximation de la valeur de l'intégrale

$$I' = \int_8^9 \frac{dx'}{x'}$$

c'est à dire du logarithme népérien de $\frac{9}{8}$ dont la valeur exacte est égale à 0,1177 8303 5656.....

Puisque nous avons placé l'axe Y au commencement de l'aire cherchée nous devons mettre $x' = 8 + x$, par quoi l'intégrale se change en

$$I' = \int_0^1 \frac{dx}{8+x},$$

d'où, selon (3),

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{1}{8+x} = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8}\right)^2 x + \left(\frac{1}{8}\right)^3 x^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^4 x^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^5 x^4 + \ldots\ldots$$

En appliquant, par exemple, la formule sub (6) pour deux ordonnées à mesurer, on obtient puisqu'ici $H = 1$ successivement

$I_1 = \frac{y_1 + y_5}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) =$	**0,1180** 5555 5556
$-\frac{1}{6} A_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\right)^3 =$	$-$ 0,0003 2552 0833
$I_2 = \frac{y_1 + y_5}{2} - \frac{1}{6} A_2 =$	**0,1177** 3003 4723
$-\frac{1}{4} A_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^4 =$	0,0000 6103 5156
$I_3 = \frac{y_1 + y_5}{2} - \frac{1}{6} A_2 - \frac{1}{4} A_3 =$	**0,1177** 9106 9879
$-\frac{3}{10} A_4 = -\frac{3}{10}\left(\frac{1}{8}\right)^5 =$	$-$ 0,0000 0915 5273
$I_4 = \frac{y_1 + y_5}{2} - \frac{1}{6} A_2 - \frac{1}{4} A_3 - \frac{3}{10} A_4 =$	**0,1177** 8191 4606
$-\frac{1}{3} A_5 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^6 =$	0,0000 0127 1566
$I_5 = \frac{y_1 + y_5}{2} - \frac{1}{6} A_2 - \frac{1}{4} A_3 - \frac{3}{10} A_4 - \frac{1}{3} A_5 =$	**0,1177** 8318 6172

Objet de cette étude.

§ 12. Non seulement dans certaines recherches purement scientifiques mais encore dans la pratique, il arrive souvent que les valeurs d'intégrales définies doivent être calculées avec la plus grande exactitude possible.

Par exemple dans l'architecture navale pour déterminer la

capacité libre, le centre de gravité, la stabilité et la résistance du navire dans l'eau. Pour faire ces calculs, on trouve diverses méthodes dans la plupart des traités de calcul intégral. Mais, souvent celui qui est chargé des calculs indiqués est déjà depuis un grand nombre d'années dans la pratique et ne connaît plus suffisamment les parties plus avancées des mathématiques, pour pouvoir suivre les développements des diverses méthodes d'approximation tels qu'ils sont donnés jusqu'à présent dans les ouvrages traitant de ce sujet. De plus, jusqu'ici les divers groupes de ces méthodes ne sont pas déduits d'une seule règle générale, mais traités pour la plupart séparément, ce qui rend difficile de saisir nettement le sens et la portée du sujet.

Or, dans le chapitre premier de cette étude, nous développerons une règle, d'où peuvent être dérivées directement et d'une manière très facile toutes les formules d'approximation dans lesquelles la courbe limite AB de la figure est remplacée par une ligne parabolique ayant quelques points de communs avec la courbe arbitraire AB. Cette règle repose sur des bases très élémentaires; sa démonstration ne demande guère plus de connaissance que la solution d'une équation linéaire.

De plus, dans cette étude nous déduirons de la règle susdite quelques méthodes et formules nouvelles d'approximation. Ces formules donnent, avec un nombre égal d'ordonnées à mesurer, une approximation plus grande et plus facile à calculer que les formules qu'on trouve ailleurs.

Le lecteur jugera si pour ces raisons il peut tirer quelque profit de cette étude.

CHAPITRE I.

Règle pour exprimer en formule
1⁰ l'aire approximative d'une figure limitée par une courbe arbitraire et
2⁰ l'erreur ou la correction de l'approximation.

§ 13. Soit l'équation de la courbe $A\,B$, fig. 1, par rapport aux axes des coordonnées perpendiculaires entre eux, $A'\,X$ et $A'\,Y''$ représentée avec une exactitude illimitée par la série convergente

$$y = f(x) = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + \ldots + A_{2m+1}\,x^{2m+1} + \\ + A_{2m+2}\,x^{2m+2} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

sans exception pour aucun point, alors l'aire I' de la figure est représentée par

$$I' = \int_o^H \{A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + \ldots + A_{2m+1}\,x^{2m+1} + \\ + A_{2m+2}\,x^{2m+2} + \text{etc.}\}\,dx = H\left\{A_0 + \frac{1}{2}A_1\,H + \frac{1}{3}A_2\,H^2 + \ldots + \right. \\ \left. + \frac{1}{2m+2}A_{2m+1}\,H^{2m+1} + \frac{1}{2m+3}A_{2m+2}\,H^{2m+2} + \text{etc.}\right\}. \quad (13)$$

Nous n'attribuons, au commencement, aucune valeur déterminée aux abscisses à mesurer; les expressions pour I' et I qui proviennent de suppositions spéciales par rapport aux abscisses seront dérivées de formules applicables pour toute valeur de $o \overset{=}{<} x_p \overset{=}{<} H$.

Supposons que les coordonnées de n points de la courbe $A\,B$ sub (12) soient connues, et que, par ces n points, soit tracée une ligne parabolique du $(n-1)^{me}$ degré, alors une aire I, qui représente approximativement l'aire I', sera comprise entre cette ligne parabolique, les ordonnées limites $A_1\,A$ et $B_1\,B$ et l'axe X de la figure. C'est d'abord cette aire I que nous déterminerons en fonction des n coordonnées connues de la courbe $A\,B$.

Soit l'équation de la ligne parabolique représentée par

$$y^1 = C_0 + C_1\,x + C_2\,x^2 + \ldots + C_{n-2}\,x^{n-2} + C_{n-1}\,x^{n-1},$$

et soit $(x_p,\, y'_p)$ un point connu de cette ligne, on a alors

$$y'_p = C_0 + C_1\,x_p + C_2\,x_p{}^2 + \ldots + C_{n-2}\,x_p{}^{n-2} + C_{n-1}\,x_p{}^{n-1} \ldots (14)$$

Dans le second membre de (14), se trouvent n termes, contenant chacun un coefficient C_q; les valeurs de ces coefficients, et par conséquent aussi la valeur de

$$I = \int_0^H \left\{ C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-2} x^{n-2} + C_{n-1} x^{n-1} \right\} dx =$$
$$= H \left\{ C_0 + \frac{1}{2} C_1 H + \frac{1}{3} C_2 H^2 + \ldots + \frac{1}{n-1} C_{n-2} H^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n} C_{n-1} H^{n-1} \right\} \ldots \ldots (15)$$

peuvent être déduites des coordonnées des n points connus. Car, si l'on substitue en (14) successivement les valeurs des n abscisses, appartenant aux n ordonnées connues, ainsi que ces ordonnées elles-mêmes, on obtient n équations dans lesquelles les n coefficients C_q et les n ordonnées connues ne se présentent, chacun en particulier, qu'au premier degré. Les n coefficients C_q des n équations peuvent être exprimés dans les premiers degrés de y_p. Donc, si l'on substitue ces valeurs de C_q dans l'expression pour I sub (15), il est établi aussitôt que la valeur de I est une fonction linéaire de y_p, en sorte que I peut être représenté par une expression de la forme

$$I = H \{ D_1 y_1 + D_2 y_2 + D_3 y_3 + \ldots + D_{n-1} y_{n-1} + D_n y_n \} \ldots (16)$$

dans laquelle les coefficients D_p sont des fonctions uniquement des grandeurs x_p, c'est à dire qu'ils représentent, indépendamment de la courbure de la ligne parabolique, des nombres constants.

Quand on substitue en (16) les valeurs des ordonnées connues, calculées de (12), on trouve:

$$\begin{aligned}
I = & H D_1 \{ A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + A_3 x_1^3 + A_4 x_1^4 + \text{etc.} \} + \\
& + H D_2 \{ A_0 + A_1 x_2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_2^3 + A_4 x_2^4 + \text{»} \} + \\
& + H D_3 \{ A_0 + A_1 x_3 + A_2 x_3^2 + A^3 x_3^3 + A_4 x_3^4 + \text{»} \} + \\
& + H D_4 \{ A_0 + A_1 x_4 + A_2 x_4^2 + A_3 x_4^3 + A_4 x_4^4 + \text{»} \} + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + H D_n \{ A_0 + A_1 x_n + A_2 x_n^2 + A_3 x_n^3 + A_4 x_n^4 + \text{»} \} = \\
= & H [\{ D_1 + D_2 + \ldots + D_n \} A_0 + \\
& + \{ x_1 D_1 + x_2 D_2 + \ldots + x_n D_n \} A_1 + \\
& + \{ x_1^2 D_1 + x_2^2 D_2 + \ldots + x_n^2 D_n \} A_2 + \\
& + \{ x_1^3 D_1 + x_2^3 D_2 + \ldots + x_n^3 D_n \} A_3 + \\
& + \{ x_1^4 D_1 + x_2^4 D_2 + \ldots + x_n^4 D_n \} A_4 + \text{etc.}] \ldots (17)
\end{aligned}$$

§ 14. En soustrayant (17) de (13), nous trouvons pour la différence $I' - I =$ corr: $=$

$$I' - I = H\Big[\Big\{1 \quad -(\quad D_1 + \quad D_2 + \ldots + \quad D_n)\Big\}A_0 +$$
$$+ \Big\{\frac{1}{2}H - (x_1 \; D_1 + x_2 \; D_2 + \ldots + x_n \; D_n)\Big\} A_1 +$$
$$+ \Big\{\frac{1}{3}H^2 - (x_1^2 D_1 + x_2^2 D_2 + \ldots + x_n^2 D_n)\Big\} A_2 +$$
$$+ \Big\{\frac{1}{4}H^3 - (x_1^3 D_1 + x_2^3 D_2 + \ldots + x_n^3 D_n)\Big\} A_3 +$$
$$+ \Big\{\frac{1}{5}H^4 - (x_1^4 D_1 + x_2^4 D_2 + \ldots + x_n^4 D_n)\Big\} A_4 + \text{etc.}\Big] \ldots (18)$$

Il est clair qu'on obtient pour I une expression d'une exactitude plus grande à mesure que la valeur de la somme des termes en (18) est plus petite. A ce sujet, nous faisons observer que dans l'expression sub (18) tous les termes avec A_{2p+1} disparaissent si, comme dans la fig. 2, l'axe Y se trouve au milieu de la base de la figure et si les ordonnées à mesurer sont placées symétriquement par rapport à cet axe.

En effet, déplaçons l'axe Y du point A', fig. 1, au point O, fig. 2, $A'O$ étant égal à OB', et soit

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{etc.} \ldots (19)$$

l'équation de la ligne limite AB, maintenant par rapport aux axes OX et OY, fig. 2.

Suivant (19), on trouve pour l'aire parfaitement exacte de la figure

$$I' = \int_{-\frac{1}{2}H}^{+\frac{1}{2}H} \Big\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{etc.}\Big\}\, dx =$$
$$= H\Big\{a_0 + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 a_2 H^2 + \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{2}\Big)^4 a_4 H^4 + \frac{1}{7}\Big(\frac{1}{2}\Big)^6 a_6 H^6 +$$
$$+ \frac{1}{9}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8 a_8 H^8 + \text{etc.}\Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Si nous traçons par $2m$ points connus de la ligne limite AB, qui sont situés symétriquement par rapport à l'axe Y, une ligne parabolique dont l'équation est représentée par

$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{2m-1} x^{2m-1},$$

et soient $(-x_p, y'_{-p})$ et (x_p, y'_p) les coordonnées de deux

points de cette ligne qui se trouvent à des côtés opposés et à des distances égales de l'axe Y, on a

$$\frac{y'_{-p}+y'_{+p}}{2}=b_0+b_2\,x_p{}^2+b_4\,x_p{}^4+\ldots+b_{2m-2}\,x_p{}^{2m-2}.$$

Indiquons de nouveau par I l'aire limitée par la ligne parabolique et qui donne approximativement l'aire vraie I' de la figure, alors on trouve, en suivant une même démonstration que dans le § 13, que I peut être représenté par une expression de la forme

$$I=H\left\{B_1\,.\frac{y_{-1}+y_{+1}}{2}+B_2\,.\frac{y_{-2}+y_{+2}}{2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+B_m\,.\frac{y_{-m}+y_{+m}}{2}\right\}\ldots\ldots(21)$$

Soient ensuite $(-x_p,\ y_{-p})$ et $(x_p,\ y_p)$ les coordonnées de deux points de la vraie courbe AB, situés de part et d'autre et à des distances égales de l'axe Y, on a

$$\frac{y_{-p}+y_{+p}}{2}=a_0+a_2\,x_p{}^2+a_4\,x_p{}^4+a_6\,x_p{}^6+a_8\,x_p{}^8+\text{etc.}$$

Si ces valeurs de $\frac{y_{-p}+y_{+p}}{2}$ sont substituées en (21) pour $x=x_1,\ x_2,\ldots x_m$, et si l'expression obtenue ainsi pour I est soustraite de I' sub (20), on trouve pour la différence de l'aire vraie I' de la figure sub (20) et l'aire approchée I sub (21):

$$I'-I=\text{corr:}=$$
$$=H\Big[\ \Big\{\quad 1\quad-(\ B_1+\quad B_2+\cdots+\quad B_m)\Big\}\,a_0+$$
$$+\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2H^2-(x_1{}^2\,B_1+x_2{}^2\,B_2+\ldots+x_m{}^2\,B_m)\right\}a_2+$$
$$+\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4H^4-(x_1{}^4\,B_1+x_2{}^4\,B_2+\ldots+x_m{}^4\,B_m)\right\}a_4+\text{etc.}\Big].$$

Soit r_p la relation entre la longueur de H et celle de l'abscisse x_p, alors nous avons $x_p=r_p\,H$ et nous pouvons remplacer la dernière expression pour $I'-I$ par la suivante:

$I' - I = \text{corr:} =$

$$= \Big\{ 1 - (B_1 + B_2 + \ldots + B_m) \Big\} a_0 H +$$

$$+ \Big\{ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (r_1^2 B_1 + r_2^2 B_2 + \ldots + r_m^2 B_m) \Big\} a_2 H^3 +$$

$$+ \Big\{ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - (r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2 + \ldots + r_m^4 B_m) \Big\} a_4 H^5 +$$

. . . .

$$+ \Big\{ \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} - (r_1^{2m-2} B_1 + r_2^{2m-2} B_2 + \ldots + r_m^{2m-2} B_m) \Big\} a_{2m-2} H^{2m-1} +$$

$$+ \Big\{ \frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - (r_1^{2m} B_1 + r_2^{2m} B_2 + \ldots + r_m^{2m} B_m) \Big\} a_{2m} H^{2m+1} +$$

$$+ \Big\{ \frac{1}{2m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} - (r_1^{2m+2} B_1 + r_2^{2m+2} B_2 + \ldots + r_m^{2m+2} B_m) \Big\} a_{2m+2} H^{2m+3} +$$

$$+ \Big\{ \frac{1}{2m+5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4} - (r_1^{2m+4} B_1 + r_2^{2m+4} B_2 + \ldots + r_m^{2m+4} B_m) \Big\} a_{2m+4} H^{2m+5} +$$

. . . .

$$+ \Big\{ \frac{1}{4m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m-2} - (r_1^{4m-2} B_1 + r_2^{4m-2} B_2 + \ldots + r_m^{4m-2} B_m) \Big\} a_{4m-2} H^{4m-1} +$$

$$+\left\{\frac{1}{4m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m} - (\ r_1^{4m} B_1 + \ r_2^{4m} B_2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \ r_m^{4m} B_m)\right\} a_{4m} H^{4m+1} +$$
$$+\left\{\frac{1}{4m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m+2} - (r_1^{4m+2} B_1 + r_2^{4m+2} B_2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + r_m^{4m+2} B_m)\right\} a_{4m+2} H^{4m+3} + \text{etc.} \ldots . (22)$$

Cette formule est la formule fondamentale de notre étude; toutes les formules d'approximation connues, dans lesquelles il est admis que la courbe limite $A\,B$ est remplacée par une ligne parabolique, en peuvent être dérivées.

Les termes avec a_{2p+1} ne se trouvent plus en (22), ce qui rend les calculs beaucoup plus simples. C'est pour cette raison que nous supposerons le plus souvent dans les recherches suivantes que les ordonnées que nous devons mettre en compte sont placées symétriquement par rapport à l'axe Y.

En attendant nous remarquons que, puisque les ordonnées à mettre en compte doivent toujours se trouver deux à deux à des distances égales de l'axe Y, fig. 2, leur nombre est toujours pair, également quand $x_1 = o$, c'est à dire même quand les deux ordonnées du milieu tombent sur l'axe Y et ne forment qu'une ordonnée à mesurer. Dans ce cas cependant le nombre des ordonnées à mesurer est impair. Nous indiquerons, e. a. dans les §§ 20, 22 et 35, quelle conséquence remarquable il en résulte si l'on prend $x_1 = o$.

§ 15. Nous donnerons à la formule (22) une forme plus générale en représentant les expressions qui y sont placées entre les accolades { } par δ_0, δ_2, δ_4, $\ldots \delta_{2p}$, etc. et les valeurs $1, \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \ldots \frac{1}{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p}$, etc, par $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_4, \ldots \mathfrak{a}_{2p}$, etc., en sorte que nous obtenons le groupe d'équations suivant:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{a}_0 \quad -(\quad B_1 + \quad B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + \quad B_m) = \mathfrak{d}_0, \\
\mathfrak{a}_2 \quad -(\quad r_1^2 B_1 + \quad r_2^2 B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + \quad r_m^2 B_m) = \mathfrak{d}_2, \\
\mathfrak{a}_4 \quad -(\quad r_1^4 B_1 + \quad r_2^4 B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + \quad r_m^4 B_m) = \mathfrak{d}_4, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{a}_{2m-2} \quad -(\quad r_1^{2m-2} B_1 + \quad r_2^{2m-2} B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + \quad r_m^{2m-2} B_m) = \mathfrak{d}_{2m-2}, \\
\mathfrak{a}_{2m} \quad -(\quad r_1^{2m} B_1 + \quad r_2^{2m} B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + \quad r_m^{2m} B_m) = \mathfrak{d}_{2m}, \\
\mathfrak{a}_{2m+2} \quad -(\quad r_1^{2m+2} B_1 + \quad r_2^{2m+2} B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + \quad r_m^{2m+2} B_m) = \mathfrak{d}_{2m+2}, \\
\mathfrak{a}_{2m+4} \quad -(\quad r_1^{2m+4} B_1 + \quad r_2^{2m+4} B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + \quad r_m^{2m+4} B_m) = \mathfrak{d}_{2m+4}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{a}_{4m-2q-2} - (r_1^{4m-2q-2} B_1 + r_2^{4m-2q-2} B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + r_m^{4m-2q-2} B_m) = \mathfrak{d}_{4m-2q-2}, \\
\mathfrak{a}_{4m-2q} \quad -(\quad r_1^{4m-2q} B_1 + \quad r_2^{4m-2q} B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + \quad r_m^{4m-2q} B_m) = \mathfrak{d}_{4m-2q}, \\
\mathfrak{a}_{4m-2q+2} - (r_1^{4m-2q+2} B_1 + r_2^{4m-2q+2} B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + r_m^{4m-2q+2} B_m) = \mathfrak{d}_{4m-2q+2}, \\
\mathfrak{a}_{4m-2q+4} - (r_1^{4m-2q+4} B_1 + r_2^{4m-2q+4} B_2 + \ldots + \\
\qquad\qquad + r_m^{4m-2q+4} B_m) = \mathfrak{d}_{4m-2q+4}, \\
\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} (23)$$

§ 16. En outre nous donnerons aux expressions pour $\mathfrak{d}_{2m}$, $\mathfrak{d}_{2m+2}$, etc. sub (23) une forme plus convenable pour les calculs. A savoir:

si en (23) nous éliminons des m premières équations les grandeurs B_p et si nous substituons leurs valeurs dans la $(m+1)$me équation, c'est à dire dans l'expression pour $\mathfrak{d}_{2m}$,

si ensuite nous éliminons de la seconde jusqu'à la $(m+1)$me équation inclusivement les grandeurs B_p et si nous substituons ces valeurs dans la $(m+2)$me équation, ainsi dans l'expression pour $\mathfrak{d}_{2m+2}$;

si nous continuons nous trouvons, en posant

$$\left.\begin{array}{ll}\text{la somme de toutes les grandeurs } r_1^2,\ r_2^2, \ldots r_m^2 & = S_1, \\ \text{la somme de leurs produits deux à deux} & = S_2, \\ \text{la somme de leurs produits trois à trois} & = S_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \text{leur produit continu} \ldots\ldots\ldots\ldots & = S_m:\end{array}\right\} \quad (24)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{d}_{2m} = \mathfrak{a}_{2m} - (\mathfrak{a}_{2m-2} - \mathfrak{d}_{2m-2})S_1 + \\
\quad + (\mathfrak{a}_{2m-4} - \mathfrak{d}_{2m-4})S_2 - \ldots (-1)^m (\mathfrak{a}_0 - \\
\qquad - \mathfrak{d}_0)S_m, \\
\mathfrak{d}_{2m+2} = \mathfrak{a}_{2m+2} - (\mathfrak{a}_{2m} - \mathfrak{d}_{2m})S_1 + \\
\quad + (\mathfrak{a}_{2m-2} - \mathfrak{d}_{2m-2})S_2 - \ldots (-1)^m (\mathfrak{a}_2 - \\
\qquad - \mathfrak{d}_2)S_m, \\
\mathfrak{d}_{2m+4} = \mathfrak{a}_{2m+4} - (\mathfrak{a}_{2m+2} - \mathfrak{d}_{2m+2})S_1 + \\
\quad + (\mathfrak{a}_{2m} - \mathfrak{d}_{2m})S_2 - \ldots (-1)^m (\mathfrak{a}_4 - \\
\qquad - \mathfrak{d}_4)S_m, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{d}_{4m-2q-2} = \mathfrak{a}_{4m-2q-2} - (\mathfrak{a}_{4m-2q-4} - \mathfrak{d}_{4m-2q-4})S_1 + \\
\quad + (\mathfrak{a}_{4m-2q-6} - \mathfrak{d}_{4m-2q-6})S_2 - \ldots (-1)^m (\mathfrak{a}_{2m-2q-2} - \\
\qquad - \mathfrak{d}_{2m-2q-2})S_m, \\
\mathfrak{d}_{4m-2q} = \mathfrak{a}_{4m-2q} - (\mathfrak{a}_{4m-2q-2} - \mathfrak{d}_{4m-2q-2})S_1 + \\
\quad + (\mathfrak{a}_{4m-2q-4} - \mathfrak{d}_{4m-2q-4})S_2 - \ldots (-1)^m (\mathfrak{a}_{2m-2q} - \\
\qquad - \mathfrak{d}_{2m-2q})S_m, \\
\mathfrak{d}_{4m-2q+2} = \mathfrak{a}_{4m-2q+2} - (\mathfrak{a}_{4m-2q} - \mathfrak{d}_{4m-2q})S_1 + \\
\quad + (\mathfrak{a}_{4m-2q-2} - \mathfrak{d}_{4m-2q-2})S_2 - \ldots (-1)^m (\mathfrak{a}_{2m-2q+2} - \\
\qquad - \mathfrak{d}_{2m-2q+2})S_m, \\
\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (25)$$

§ 17. Si du groupe sub (23) on prend arbitrairement m équations et si l'on attribue à chacune d'elles une valeur quelconque, on obtient alors m équations dont — si elles ne sont pas mutuellement en contradiction — peuvent être résolus:

1°. les m coefficients B_p sub (21), si l'on donne à chacune des m grandeurs r_p une certaine valeur (nous suivrons cette méthode — quoique d'une manière moins générale — dans le deuxième chapitre de cette étude);

2°. les m valeurs r_p^2, si l'on donne à chacun des m coefficients B_p une certaine valeur (comme nous le ferons dans le troisième chapitre), ou

3°. les m valeurs qui restent inconnues, si l'on donne à $(m-t)$ grandeurs r_p^2 et à t coefficients B_p une certaine valeur (quatrième chapitre).

Si les valeurs de r_p sub 1°., ou celles de B_p sub 2°., etc. sont connues, on peut calculer de (21) la valeur de I et de (22) la valeur de corr: qui y appartient. —

Excepté aux §§ 33 et 34, nous supposerons toujours dans cette étude qu'en (23) les valeurs δ_{2p} des m premières équations sont égales à zéro, de sorte que nous avons le groupe suivant d'équations

$$\left.\begin{array}{l} B_1 + B_2 + \ldots + B_m = a_0, \\ r_1^2 B_1 + r_2^2 B_2 + \ldots + r_m^2 B_m = a_2, \\ r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2 + \ldots + r_m^4 B_m = a_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1^{2m-2} B_1 + r_2^{2m-2} B_2 + \ldots + r_m^{2m-2} B_m = a_{2m-2}. \end{array}\right\} \quad (26)$$

Si l'on écrit des grandeurs r_1^2, r_2^2,.... r_m^2, à l'exception de la grandeur r_p^2:

pour leur somme . . . . Σ_1,
pour la somme de leurs produits deux à deux . . Σ_2,
pour la somme de leurs produits trois à trois . . Σ_3,
. . . .
pour leur produit continu . . . . Σ_{m-1},

on trouve de (26):

$$B_p = \frac{a_{2m-2} - a_{2m-4}\Sigma_1 + a_{2m-6}\Sigma_2 - \ldots (-1)^{m-1} a_0 \Sigma_{m-1}}{r_p^{2m-2} - r_p^{2m-4}\Sigma_1 + r_p^{2m-6}\Sigma_2 - \ldots (-1)^{m-1}\Sigma_{m-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

ou

$$B_p = \frac{a_{2m-2} - a_{2m-4}\Sigma_1 + a_{2m-6}\Sigma_2 - \ldots (-1)^{m-1} a_0 \Sigma_{m-1}}{(r_p^2 - r_1^2)(r_p^2 - r_2^2)\ldots(r_p^2 - r_{p-1}^2)(r_p^2 - r_{p+1}^2)\ldots(r_p^2 - r_{m-1}^2)(r_p^2 - r_m^2)} \quad (28)$$

valeurs de B_p, qui transportées en (21), font connaître l'aire approchée I de la figure, exprimée en r, y et m.

Dans les m équations sub (26) se trouvent m grandeurs B_p et m grandeurs r_p^2, donc en tout $2m$ grandeurs. Ces $2m$ grandeurs admettent $2m$ équations, tandis qu'en (26) elles ne sont liées que par m équations. Par conséquent, si en (26) nous ne donnons qu'à q grandeurs r_p^2, q étant égal ou inférieur à m, des valeurs arbitraires, nous pouvons faire

correspondre encore les $(m-q)$ autres grandeurs r_p^2 à $(m-q)$ équations de condition. Par exemple, nous pouvons alors poser la condition que $(m-q)$ termes arbitraires δ_{2p} sub (25) auront des valeurs quelconques, pourvu que celles-ci soient choisies de manière qu'il n'en résultent pas, pour une ou plusieurs des $(m-q)$ grandeurs r_p^2 qui doivent être déterminées encore, des valeurs contraires à la nature du problême.

Quand nous posons ici que chacune des $(m-q)$ premières valeurs de δ_{2p} sub (25) doit être égale à zéro, nous trouvons de (25), puisque $\delta_0 = o, \ldots \delta_{4m-2q-2} = o,$

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_{2m} = \mathfrak{a}_{2m} - \mathfrak{a}_{2m-2} S_1 + \mathfrak{a}_{2m-4} S_2 - \\
\qquad - \ldots (-1)^m \mathfrak{a}_0 S_m = o \\
\delta_{2m+2} = \mathfrak{a}_{2m+2} - \mathfrak{a}_{2m} S_1 + \mathfrak{a}_{2m-2} S_2 - \\
\qquad - \ldots (-1)^m \mathfrak{a}_2 S_m = o \\
\delta_{2m+4} = \mathfrak{a}_{2m+4} - \mathfrak{a}_{2m+2} S_1 + \mathfrak{a}_{2m} S_2 - \\
\qquad - \ldots (-1)^m \mathfrak{a}_4 S_m = o \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\delta_{4m-2q-2} = \mathfrak{a}_{4m-2q-2} - \mathfrak{a}_{4m-2q-4} S_1 + \mathfrak{a}_{4m-2q-6} S_2 - \\
\qquad - \ldots (-1)^m \mathfrak{a}_{2m-2q-2} S_m = o \\
\text{et} \\
\text{corr:} = \delta_{4m-2q} H^{4m-2q+1} a_{4m-2q} + \\
\qquad + \delta_{4m-2q+2} H^{4m-2q+3} a_{4m-2q+2} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} (29)$$

§ 18. Comme résumé de tout ce qui a été dit ci-dessus, nous obtenons le résultat suivant:

On trouve: en premier lieu d'après les premières équations de (29) les valeurs des r_p qui ne sont pas prises arbitrairement; ensuite d'après (21) l'expression pour I en y transportant les valeurs de B_p de (27) ou (28), et enfin d'après la dernière équation de (29) l'expression pour corr:, notamment

$$\begin{array}{l}
\text{corr:} = \delta_{4m-2q} H^{4m-2q+1} a_{4m-2q} + \\
\qquad + \delta_{4m-2q+2} H^{4m-2q+3} a_{4m-2q+2} + \\
\qquad + \delta_{4m-2q+4} H^{4m-2q+5} a_{4m-2q+4} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \quad (30)$$

ainsi, en relation avec (23):

$$
\begin{aligned}
\text{corr:} = \mathfrak{a}_{4m-2q} & - (r_1^{4m-2q} B_1 + r_2^{4m-2q} B_2 + \ldots + \\
& + r_m^{4m-2q} B_m)\} H^{4m-2q+1} a_{4m-2q} + \\
& + \mathfrak{a}_{4m-2q+2} - (r_1^{4m-2q+2} B_1 + r_2^{4m-2q+2} B_2 + \ldots + \\
& + r_m^{4m-2q+2} B_m)\} H^{4m-2q+3} a_{4m-2q+2} + \\
& + \mathfrak{a}_{4m-2q+4} - (r_1^{4m-2q+4} B_1 + r_2^{4m-2q+4} B_2 + \ldots + \\
& + r_m^{4m-2q+4} B_m)\} H^{4m-2q+5} a_{4m-2q+4} + \\
& + \text{etc.} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31)
\end{aligned}
$$

ou, en relation avec (25), en remarquant que $\delta_0 = o$, $\delta_2 = o, \ldots$ $\delta_{4m-2q-2} = o$:

$$
\begin{aligned}
\text{corr:} = \{ \mathfrak{a}_{4m-2q} & - \mathfrak{a}_{4m-2q-2} S_1 + \mathfrak{a}_{4m-2q-4} S_2 - \\
& - \ldots (-1)^m \mathfrak{a}_{2m-2^q} S_m\} H^{4m-2q+1} a_{4m-2q} + \\
& + \{ \mathfrak{a}_{4m-2q+2} - (\mathfrak{a}_{4m-2q} - \delta_{4m-2q}) S_1 + \mathfrak{a}_{4m-2q-2} S_2 - \\
& - \ldots (-1)^m \mathfrak{a}_{2m-2q+2} S_m\} H^{4m-2q+3} a_{4m-2q+2} + \\
& + \{ \mathfrak{a}_{4m-2q+4} - (\mathfrak{a}_{4m-2q+2} - \delta_{4m-2q+2}) S_1 + \\
& + (\mathfrak{a}_{4m-2q} - \delta_{4m-2q}) S_2 - \ldots \\
& \ldots (-1)^m \mathfrak{a}_{2m-2q+4} S_m\} H^{4m-2q+5} a_{4m-2q+4} + \text{etc.} \quad (32)
\end{aligned}
$$

CHAPITRE II.

Les valeurs des coefficients numériques se trouvent dans la formule de l'aire approximative d'une figure exprimées en fonction des longueurs des abscisses.

§ 19. Nous commencerons par déduire les formules d'après Newton-Cotes et d'après MacLaurin, les premières étant les plus anciennes et encore les plus employées.

Méthodes d'approximation d'après **Newton-Cotes** *et d'après* **MacLaurin** (à *toutes* les abscisses, on a donné des longueurs déterminées).

§ 20. En suivant ces deux méthodes, on adopte des valeurs déterminées pour toutes les grandeurs r_p des abscisses à mesurer; ainsi, nous avons alors dans le § 18 $q = m$.

Dans ces deux méthodes, on suppose, quand le nombre des ordonnées à mesurer est pair, que la figure est divisée en bandes de largeur égale, comme nous l'avons fait dans les §§ 3 et 4. En appliquant la méthode selon Newton-Cotes,

on suppose que les ordonnées extrêmes de chaque bande seront mesurées, tandis que, si l'on applique la méthode de MacLaurin, on suppose que, de chaque bande, seule l'ordonnée médiane est mesurée.

Si le nombre des ordonnées à mesurer est impair, on ne suit pas tout à fait cette division de la figure en bandes de largeur égale; on admet une exception, dans ce sens qu'on prend $x_1 = o$, en sorte que les deux ordonnées du milieu de la figure, notamment y_{-1} et y_{+1}, tombent l'une sur l'autre dans l'axe Y et ne forment qu'une ordonnée à mesurer y_1. Dans ce cas, il n'y a par conséquent que $(2m-1)$ ordonnées à mesurer, mais en réalité $2m$ ordonnées sont mises en compte. C'est de là, qu'en appliquant les deux méthodes nommées, l'exactitude de l'approximation est à peu près aussi grande avec un nombre impair d'ordonnées à mesurer qu'avec le nombre pair qui y succède immédiatement.

On a — voyez les tables A et B à la fin de cette étude — selon Newton-Cotes, en cas d'un nombre pair d'ordonnées à mesurer

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \frac{1}{2m-1}\cdot\frac{1}{2};\ r_2 = \frac{3}{2m-1}\cdot\frac{1}{2};\ r_3 = \frac{5}{2m-1}\cdot\frac{1}{2};\ldots \\ \qquad\qquad\ldots r_m = \frac{2m-1}{2m-1}\cdot\frac{1}{2} \\ \text{et pour un nombre impair:} \\ r_1 = o;\qquad r_2 = \frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{2};\ r_3 = \frac{2}{m-1}\cdot\frac{1}{2};\ldots \\ \qquad\qquad\ldots r_m = \frac{m-1}{m-1}\cdot\frac{1}{2}. \end{array}\right\} \quad (33)$$

Selon MacLaurin on a, si le nombre des ordonnées à mesurer est $2m$:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{2};\qquad r_2 = \frac{3}{2m}\cdot\frac{1}{2};\qquad r_3 = \frac{5}{2m}\cdot\frac{1}{2};\ldots \\ \qquad\qquad\ldots r_m = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{1}{2} \\ \text{et s'il est } (2m-1): \\ r_1 = o;\qquad r_2 = \frac{2}{2m-1}\cdot\frac{1}{2};\ r_3 = \frac{4}{2m-1}\cdot\frac{1}{2};\ldots \\ \qquad\qquad\ldots r_m = \frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{1}{2}. \end{array}\right\} \quad (34)$$

On trouve, après quelque développement, en substituant les valeurs de r_p de (33) et (34) en (27) ou (28), les valeurs de B_p et, en substituant les valeurs de B_p en (21), les expressions correspondantes pour I. Puis, en vertu de (30):

$$\text{corr:} = \delta_{2m} H^{2m+1} a_{2m} + \delta_{2m+2} H^{2m+3} a_{2m+2} + \\ + \delta_{2m+4} H^{2m+5} a_{2m+4} + \text{etc.} \ldots \ldots (35)$$

Ainsi, d'après (31),

$$\text{corr:} = \left\{ \frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - (r_1^{2m} B_1 + r_2^{2m} B_2 + \ldots + \right. \\ \left. + r_m^{2m} B_m) \right\} H^{2m+1} a_{2m} + \\ + \left\{ \frac{1}{2m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} - (r_1^{2m+2} B_1 + r_2^{2m+2} B_2 + \ldots + \right. \\ \left. + r_m^{2m+2} B_m) \right\} H^{2m+3} a_{2m+2} + \\ + \left\{ \frac{1}{2m+5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4} - (r_1^{2m+4} B_1 + r_2^{2m+4} B_2 + \ldots + \right. \\ \left. + r_m^{2m+4} B_m) \right\} H^{2m+5} a_{2m+4} + \text{etc.} \ldots (36)$$

ou, d'après (32), puisque $a_{2p} = \frac{1}{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p}$,

$$\text{corr:} = \left\{ \frac{1}{2m+1} - \frac{2^2 . S_1}{2m-1} + \frac{2^4 . S_2}{2m-3} - \ldots \right. \\ \left. \ldots (-1)^m . \frac{2^{2m} . S_m}{1} \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} H^{2m+1} a_{2m} + \\ + \left\{ \frac{1}{2m+3} - \frac{2^2 . S_1}{2m+1} + \frac{2^4 . S_2}{2m-1} - \ldots \right. \\ \ldots (-1)^m . \frac{2^{2m} . S_m}{3} + \\ \left. + 2^{2m+2} \delta_{2m} S_1 \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} H^{2m+3} a_{2m+2} + \\ + \left\{ \frac{1}{2m+5} - \frac{2^2 . S_1}{2m+3} + \frac{2^4 . S_2}{2m+1} - \ldots \right. \\ \ldots (-1)^m . \frac{2^{2m} . S_m}{5} + 2^{2m+4} \delta_{2m+2} S_1 - \\ \left. - 2^{2m+4} \delta_2 \; S_2 \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4} H^{2m+5} a_{2m+4} + \text{etc.} \; (37)$$

§ 21. Pour montrer la méthode de calcul de B_p, de I et de corr: nous prenons la formule d'approximation d'après MacLaurin, dans le cas où le nombre d'ordonnées à mesurer est 5, de sorte qu'on a, d'après (34): $2m - 1 = 5$, ainsi $m = 3$, puis $r_1 = o$, $r_2 = \frac{1}{5}$ et $r_3 = \frac{2}{5}$, ou $r_1^2 = o$, $r_2^2 = \frac{1}{25}$ et $r_3^2 = \frac{4}{25}$.

D'après (26) nous avons

$$B_1 + \quad B_2 + \quad B_3 = a_0 = 1,$$
$$r_1^2 B_1 + r_2^2 B_2 + r_3^2 B_3 = a_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2 + r_3^4 B_3 = a_4 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

ainsi, d'après (27),

$$B_p = \frac{a_4 - a_2 \Sigma_1 + a_0 \Sigma_2}{r_p^4 - r_p^2 \Sigma_1 + \Sigma_2} = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Sigma_1 + \Sigma_2}{r_p^4 - r_p^2 \Sigma_1 + \Sigma_2}$$

par conséquent

$$B_1 = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25}\right) + \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{25}}{\frac{1}{25}\cdot\frac{4}{25}} = \frac{201}{576},$$

$$B_2 = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{25}}{\left(\frac{1}{25}\right)^2 - \frac{1}{25}\cdot\frac{4}{25}} = \frac{100}{576},$$

$$B_3 = 1 - (B_1 + B_2) = \frac{275}{576}$$

et d'après (21)

$$I = H\left\{\frac{201}{576}\cdot\frac{y_1 + y_1}{2} + \frac{100}{576}\cdot\frac{y_{-2} + y_{+2}}{2} + \frac{275}{576}\cdot\frac{y_{-3} + y_{+3}}{2}\right\}$$

ou

$$I = \frac{H}{1152}\left\{402\, y_1 + 100\,(y_{-2} + y_{+2}) + 275\,(y_{-3} + y_{+3})\right\}.$$

Pour la correction, on trouve d'après (35)

$$\text{corr:} = \delta_6 H^7 a_6 + \delta_8 H^9 a_8 + \delta_{10} H^{11} a_{10} + \text{etc.}$$

et puisque $m = 3$ et $x_1 = o$, on a, d'après (36):

$$\text{corr:}=\left\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6-\left[\left(\frac{1}{25}\right)^3\cdot\frac{100}{576}+\left(\frac{4}{25}\right)^3\cdot\frac{275}{576}\right]\right\}H^7\,a_6+$$
$$+\left\{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^8-\left[\left(\frac{1}{25}\right)^4\cdot\frac{100}{576}+\left(\frac{4}{25}\right)^4\cdot\frac{275}{576}\right]\right\}H^9\,a_8+$$
$$+\left\{\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-\left[\left(\frac{1}{25}\right)^5\cdot\frac{100}{576}+\left(\frac{4}{25}\right)^5\cdot\frac{275}{576}\right]\right\}H^{11}a_{10}+\text{etc.}$$

d'où

$$\text{corr:}=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{223}{13125}H^7\,a_6+\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\frac{869}{28125}H^9\,a_8+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{170273}{4296875}H^{11}\,a_{10}+\ldots\ldots$$

ou de (37), puisque $m=3$, $S_1=\frac{1+4}{25}=\frac{1}{5}$, $S_2=\frac{1}{25}\cdot\frac{4}{25}=$ $=\frac{4}{625}$ et $S_3=o$,

$$\delta_6=\left\{\frac{1}{7}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{16}{3}\cdot\frac{4}{625}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{223}{13125},$$
$$\delta_8=\left\{\frac{1}{9}-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{5}+\frac{16}{5}\cdot\frac{4}{625}+4\cdot\frac{223}{13125}\cdot\frac{1}{5}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^8=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\frac{869}{28125}\quad\text{et}$$
$$\delta_{10}=\left\{\frac{1}{11}-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{5}+\frac{16}{7}\cdot\frac{4}{625}+4\cdot\frac{869}{28125}\cdot\frac{1}{5}-\right.$$
$$\left.-16\cdot\frac{223}{13125}\cdot\frac{4}{625}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{170273}{4296875},$$

ce qui donne le même résultat pour **corr:** que celui que nous venons de trouver ci-dessus.

Enfin, pour les longueurs des abscisses, on trouve, x_p étant égal à $r_p\,H$:

$$x_1=o,\ x_2=\frac{1}{5}H\ \text{et}\ x_3=\frac{2}{5}H.$$

Les expressions, d'après Newton-Cotes et MacLaurin, pour I et au moins le premier des termes de correction qui y appartiennent, sont recueillis pour $n=2$, 3, etc. dans les tables A et B à la fin de cette étude.

§ 22. Appliquons les termes de correction à l'approximation de la valeur de l'intégrale de

$$I=\int_8^9 \frac{dx'}{x'}=0,\ 1177\ 8303\ 5638\ \ldots\ldots$$

En prenant $x'=8\frac{1}{2}+x$, l'intégrale se change en celle-ci

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{8\frac{1}{2}+x},$$

d'où $y\ =a_0+a_1 x\ +a_2 x^2\ +a_3 x^3\ +a_4 x^4+\ldots=$

$$=\frac{1}{8\frac{1}{2}+x}=\frac{2}{17}-\left(\frac{2}{17}\right)^2 x+\left(\frac{2}{17}\right)^3 x^2-\left(\frac{2}{17}\right)^4 x^3+\left(\frac{2}{17}\right)^5 x^4-\ldots$$

Les formules d'après Newton-Cotes donnent pour $n=2$, 3 et 4 ordonnées à mesurer (table A) pour

$$n=2: I=\frac{1}{2}(y_{-1}+y_{+1})=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)=\quad 0{,}1180\ 5556\quad \ldots\ldots$$

$$\text{corr:}=-\frac{1}{2\,.\,3}a_2=$$

$$=-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{17}\right)^3=\underline{-0{,}0002\ \ 7139\ldots\ldots\ldots}$$

$$\text{ainsi } I=\quad 0{,}1177\ 8417\ldots\ldots\ldots$$

$$n=3: I=\frac{1}{6}\left\{(y_{-2}+y_{+2})+4y_1\right\}=$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{17}{72}+4\,.\,\frac{2}{17}\right\}=\quad 0{,}1177\ 8322\ 44\ldots\ldots$$

$$\text{corr:}=-\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}a_4=$$

$$=-\frac{1}{120}\left(\frac{2}{17}\right)^5=\underline{-0{,}0000\ \ 0018\ \ 78\ldots\ldots}$$

$$\text{ainsi } I=\quad 0{,}1177\ 8303\ 66\ldots\ldots$$

$$n=4: I=\frac{1}{8}\left\{(y_{-2}+y_{+2})+\right.$$

$$\left.+3(y_{-1}+y_{+1})\right\}=\quad 0{,}1177\ 8311\ 9658\ldots$$

$$\text{corr:}=-\frac{1}{2\,.\,3^3\,.\,5}a_4=$$

$$=-\frac{1}{270}\left(\frac{2}{17}\right)^5=\underline{-0{,}0000\ \ 0008\ \ 3472\ldots}$$

$$\text{ainsi } I=\quad 0{,}1177\ 8303\ 6186\ldots$$

La dernière valeur ne donne pas une différence notable avec celle obtenue par l'approximation pour $n = 3$. (Voyez le § 20, 3ième alinéa).

Méthode d'approximation d'après **Gauss** (une longueur arbitraire n'est donnée qu'à *une seule* abscisse ou n'est donnée à *aucune*).

§ 23. Gauss a fait connaître une méthode d'approximation par laquelle, en calculant l'aire I de $2m$ ordonnées à mesurer, on obtient une exactitude aussi grande qu'en se servant de $4m$ ordonnées selon chacune des deux méthodes traitées dans le § 20. Cette méthode exige cependant que les ordonnées à mesurer soient placées à des distances inégales, de manière que leurs abscisses croissent suivant une loi donnée ci-après dans les formules (38) et (42).

La méthode de Gauss (qui n'est qu'un cas particulier d'approximation de l'intégrale plus générale $I' = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^q f(x)\,dx$; voyez le § 61) peut s'exprimer en peu de mots.

§ 24. En développant la méthode de Gauss pour un nombre pair d'ordonnées à mesurer, on n'adopte comme connue aucune des $2m$ grandeurs B_p et r_p, mais on calcule les valeurs de r_p^2 d'après (29) en posant dans ces équations $q = o$; puis on calcule les valeurs de B_p d'une des équations sub (27) ou (28) après y avoir substitué les valeurs trouvées pour r_p^2.

D'après les formules sub (29) on trouve, en remarquant que $a_{2p} = \frac{1}{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p}$:

$$\frac{1}{2m+1} - \frac{2^2}{2m-1} S_1 + \frac{2^4}{2m-3} S_2 - \ldots (-1)^m 2^{2m} S_m = o,$$

$$\frac{1}{2m+3} + \frac{2^2}{2m+1} S_1 + \frac{2^4}{2m-1} S_2 - \ldots (-1)^m \frac{1}{3} . 2^{2m} S_m = o,$$

. . . .

$$\frac{1}{4m-1} - \frac{2^2}{4m-3} S_1 + \frac{2^4}{4m-5} S_2 - \ldots (-1)^m \frac{1}{2m-1} . 2^{2m} S_m = o.$$

En éliminant de ces équations les grandeurs S_1, S_2, etc., on trouve que les m inconnues $r_p{}^2$ sont les racines de l'équation du $2\,m^{\text{ième}}$ degré

$$r^{2m} - S_1\, r^{2m-2} + S_2\, r^{2m-4} - \ldots (-1)^m S_m = o \quad . \; . \; (38)$$

dans laquelle $S_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{2m-1}{4m-1}$,

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{2m-3}{4m-3} \cdot S_1,$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{2m-5}{4m-5} \cdot S_2,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$S_m = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2m+1} \cdot S_{m-1}.$$

Pour la correction, on trouve d'après (30) l'expression

$$\text{corr}:= \delta_{4m} H^{4m+1} a_{4m} + \delta_{4m+2} H^{4m+3} a_{4m+2} + \\ + \delta_{4m+4} H^{4m+5} a_{4m+4} + \text{etc.} \ldots (39)$$

dans laquelle d'après (32)

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{4m} &= \left\{\frac{1}{4m+1} - \frac{2^2 . S_1}{4m-1} + \frac{2^4 . S_2}{4m-3} - \ldots \right. \\
&\qquad \left. \ldots (-1)^m \cdot \frac{2^{2m} S_m}{2m+1}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m}, \\
\delta_{4m+2} &= \left\{\frac{1}{4m+3} - \frac{2^2 S_1}{4m+1} + \frac{2^4 S_2}{4m-1} - \ldots \right. \\
&\qquad \left. \ldots (-1)^m \cdot \frac{2^{2m} S_m}{2m+3} + 2^{4m+2} \delta_{4m} S_1\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m+2}, \\
\delta_{4m+4} &= \left\{\frac{1}{4m+5} - \frac{2^2 S_1}{4m+3} + \frac{2^4 S_2}{4m+1} - \ldots \right. \\
&\qquad \ldots (-1)^m \cdot \frac{2^{2m} S_m}{2m+5} + 2^{4m+4} \delta_{4m+2} S_1 - \\
&\qquad \left. - 2^{4m+4} \delta_{4m} S_2\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m+4}
\end{aligned}\right\} (40)$$

etc. ou, d'après (31)

$$\text{corr}:=\left\{\frac{1}{4m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m}-(r_1^{4m}B_1+r_2^{4m}B_2+\ldots+r_m^{4m}B_m)\right\}H^{4m+1}a_{4m}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m+2}-(r_1^{4m+2}B_1+r_2^{4m+2}B_2+\ldots+r_m^{4m+2}B_m)\right\}H^{4m+3}a_{4m+2}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4m+5}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m+4}-(r_1^{4m+4}B_1+r_2^{4m+4}B_2+\ldots+r_m^{4m+4}B_m)\right\}H^{4m+5}a_{4m+4}+\text{etc.}\ldots(41)$$

§ 25. Dans le cas, par exemple, de $m=3$, c'est à dire de $n=2m=6$ ordonnées à mesurer, on trouve

$$S_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{11}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{15}{11},$$

$$S_2=\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{15}{11}=\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{5}{11}\text{ et}$$

$$S_3=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{11}=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{5}{231};$$

par conséquent pour l'équation sub (38)

$$r^6-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{15}{11}\cdot r^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{5}{11}\cdot r^2-\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{5}{231}=o$$

ou

$$(4r^2)^3-\frac{15}{11}(4r^2)^2+\frac{5}{11}(4r^2)-\frac{5}{231}=o$$

d'où

$4r_1^2=0{,}0569\ 3911\ 5967\ 0073\ 5324$
et $r_1=0{,}1193\ 0959\ 3041\ 5985$,

$4r_2^2=0{,}4371\ 9785\ 2751\ 0939\ 4180$
et $r_2=0{,}3306\ 0469\ 3233\ 1323$,

$4r_3^2=0{,}8694\ 9939\ 4918\ 2623\ 4132$
et $r_3=0{,}4662\ 3475\ 7101\ 5761$.

Puis d'après (27)

$$B_p = \frac{\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2\,\Sigma_1 + \mathfrak{a}_0\,\Sigma_2}{r_p{}^4 - r_p{}^2\,\Sigma_1 + \Sigma_2} = \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^4 - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2\,\Sigma_1 + \Sigma_2}{r_p{}^4 - r_p{}^2\,\Sigma_1 + \Sigma_2} =$$
$$= \frac{\frac{1}{5} - \frac{4}{3}\,\Sigma_1 + 16\,\Sigma_2}{16\,r_p{}^2(r_p{}^2 - \Sigma_1) + 16\,\Sigma_2},$$

ainsi

$$B_1 = \frac{\frac{1}{5} - \frac{4}{3}(r_2{}^2 + r_3{}^2) + 16\,r_2{}^2 r_3{}^2}{16\,r_1{}^2\,\{r_1{}^2 - (r_2{}^2 + r_3{}^2)\} + 16\,r_2{}^2\,r_3{}^2} =$$
$$= 0{,}4679\ 1393\ 4572\ 6910\ 474\ldots.,$$

$$B_2 = \frac{\frac{1}{5} - \frac{4}{3}(r_1{}^2 + r_3{}^2) + 16\,r_1{}^2 r_3{}^2}{16\,r_2{}^2\,\{r_2{}^2 - (r_1{}^2 + r_3{}^2)\} + 16\,r_1{}^2\,r_3{}^2} =$$
$$= 0{,}3607\ 6157\ 3048\ 1386\ 071\ldots \text{ et}$$

$$B_3 = 1 - (B_1 + B_2) = 0{,}1713\ 2449\ 2379\ 1703\ 455\ldots.;$$

donc, d'après (21),

$$I = H\,\{\ 0{,}2339\ 5696\ 7286\ 3455\ 237\ldots(y_{-1} + y_{+1}) +$$
$$+ 0{,}1803\ 8078\ 6524\ 0693\ 035\ldots(y_{-2} + y_{+2}) +$$
$$+ 0{,}0856\ 6224\ 6189\ 5851\ 727\ldots(y_{-3} + y_{+3})\ \}.$$

Enfin, pour la correction, d'après (39) et (40):

$$\text{corr:} = \delta_{12}\,H^{13}\,a_{12} + \delta_{14}\,H^{15}\,a_{14} + \text{etc.}$$

dans laquelle

$$\delta_{12} = \left\{\frac{1}{13} - \frac{1}{11}\,\frac{15}{11} + \frac{1}{9}\cdot\frac{5}{11} - \frac{1}{7}\cdot\frac{5}{231}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot\frac{256}{693\ 693} = \frac{1}{1109\ 9088},$$

$$\delta_{14} = \left\{\frac{1}{15} - \frac{1}{13}\cdot\frac{15}{11} + \frac{1}{11}\cdot\frac{5}{11} - \frac{1}{9}\cdot\frac{5}{231} +\right.$$
$$\left. + \frac{256}{693\ 693}\cdot\frac{15}{11}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{14} = \frac{533}{73\ 2539\ 8080};$$

ainsi

$$\text{corr:} = \frac{1}{1109\ 9088}\,H^{13}\,a_{12} + \frac{533}{73\ 2539\ 8080}\,H^{15}\,a_{14} + \text{etc.}$$

ou, d'après (39) et (41),

$$\text{corr}:=\left\{\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}-(r_1{}^{12}B_1+r_2{}^{12}B_2+r_3{}^{12}B_3)\right\}H^{13}a_{12}+$$
$$+\left\{\frac{1}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{14}-(r_1{}^{14}B_1+r_2{}^{14}B_2+r_3{}^{14}B_3)\right\}H^{15}a_{14}+$$
$$+\left\{\frac{1}{17}\left(\frac{1}{2}\right)^{16}-(r_1{}^{16}B_1+r_2{}^{16}B_2+r_3{}^{16}B_3)\right\}H^{17}a_{16}+\text{etc.}$$

Après la substitution des valeurs trouvées ci-dessus pour $r_p{}^2$ et B_p, dans la dernière expression pour corr:, on doit parvenir au même résultat que celui que nous venons de calculer.

§ 26. Si l'on fait usage d'un nombre impair d'ordonnées à mesurer, on doit poser en (29) $q=1$ et l'on obtient, puisque $S_m=o$:

$$\frac{1}{2m+1}-\frac{2^2}{2m-1}S_1+\frac{2^4}{2m-3}S_2-\ldots(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-2}}{3}S_{m-1}=o,$$
$$\frac{1}{2m+3}-\frac{2^2}{2m+1}S_1+\frac{2^4}{2m-1}S_2-\ldots(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-2}}{5}S_{m-1}=o,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{4m-3}-\frac{2^2}{4m-5}S_1+\frac{2^4}{4m-7}S_2-\ldots(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-2}}{2m-1}S_{m-1}=o,$$

d'où l'on trouve, pour la solution des $(m-1)$ grandeurs inconnues r_p, l'équation

$$r^{2m-2}-S_1r^{2m-4}+S_2r^{2m-6}-\ldots(-1)^{m-1}S_{m-1}=o\ \ldots\ (42)$$

dans laquelle, en posant $(2m-1)=n$:

$$S_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{2m-1}{4m-3}\quad=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{n}{2n-1},$$
$$S_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{2m-3}{4m-5}S_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{n-2}{2n-3}\cdot S_1,$$
$$S_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{2m-5}{4m-7}S_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{n-4}{2n-5}\cdot S_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{m-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{m-1}\cdot\frac{3}{2m+1}S_{m-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{m-1}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot S_{m-2},$$

de (30) on trouve

$$\left.\begin{aligned}
\text{corr:} &= \delta_{4m-2} H^{4m-1} a_{4m-2} + \delta_{4m} H^{4m+1} a_{4m} + \\
&\quad + \delta_{4m+2} H^{4m+3} a_{4m+2} + \text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

dans laquelle, d'après (32),

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{4m-2} &= \left\{\frac{1}{4m-1} - \frac{2^2 . S_1}{4m-3} + \frac{2^4 . S_2}{4m-5} - \right. \\
&\qquad \left. - \ldots (-1)^{m-1} . \frac{2^{2m-2} . S_{m-1}}{2m+1}\right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{4m-2}, \\
\delta_{4m} &= \left\{\frac{1}{4m+1} - \frac{2^2 . S_1}{4m-1} + \frac{2^4 . S_2}{4m-3} - \right. \\
&\qquad \left. - \ldots (-1)^{m-1} . \frac{2^{2m-2} . S_{m-1}}{2m+3} + 2^{4m} \delta_{4m-2} S_1\right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{4m}, \\
&\text{etc.} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

ou d'après (31):

$$\begin{aligned}
\text{corr:} &= \left\{\frac{1}{4m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m-2} - (r_1^{4m-2} B_1 + r_2^{4m-2} B_2 + \ldots + \right. \\
&\qquad \left. + r_m^{4m-2} B_m)\right\} H^{4m-1} a_{4m-2} + \\
&+ \left\{\frac{1}{4m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m} - (r_1^{4m} B_1 + r_2^{4m} B_2 + \ldots + \right. \\
&\qquad \left. + r_m^{4m} B_m)\right\} H^{4m+1} a_{4m} + \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

§ 27. Dans le cas, par exemple, de $n=7$ ordonnées à mesurer, c'est à dire de $m=4$, on a

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{3}{1} . \frac{7}{13} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{21}{13}, \\
S_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 . \frac{2}{2} . \frac{5}{11} . \frac{21}{13} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 . \frac{105}{143} \text{ et} \\
S_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 . \frac{1}{3} . \frac{3}{9} . \frac{105}{143} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 . \frac{35}{429};
\end{aligned}$$

ainsi, d'après (42):

$$(4r^2)^3 - \frac{21}{13}(4r^2)^2 + \frac{105}{143}(4r^2) - \frac{35}{429} = o$$

et pour le premier terme de correction d'après (43):

$$\text{corr:} = \left\{\frac{1}{15} - \frac{1}{13}\cdot\frac{21}{13} + \frac{1}{11}\cdot\frac{105}{143} - \frac{1}{9}\cdot\frac{35}{429}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{14} H^{15} a_{14} =$$

$$= \frac{1}{1\ 7667\ 9360} H^{15} a_{14}.$$

§ 28. On déduit facilement, de (38) et (42), des formules servant à calculer les valeurs de r_p pour les différentes valeurs de n. Ces équations sont les suivantes, pour le nombre n d'ordonnées à mesurer:

$n = 2$: $3(4r^2) - 1 = o$,

$n = 3$: $5(4r^2) - 3 = o$,

$n = 4$: $35(4r^2)^2 - 30(4r^2) + 3 = o$,

$n = 5$: $63(4r^2)^2 - 70(4r^2) + 15 = o$,

$n = 6$: $231(4r^2)^3 - 315(4r^2)^2 + 105(4r^2) - 5 = o$,

$n = 7$: $429(4r^2)^3 - 693(4r^2)^2 + 315(4r^2) - 35 = o$,

$n = 8$: $6435(4r^2)^4 - 12012(4r^2)^3 + 6930(4r^2)^2 - 1260(4r^2) + 35 = o$

$n = 9$: $12155(4r^2)^4 - 25740(4r^2)^3 + 18018(4r^2)^2 - 4620(4r^2) + 315 = o$ et

$n = 10$: $46189(4r^2)^5 - 109395(4r^2)^4 + 90090(4r^2)^3 - 30030(4r^2)^2 + 3665(4r^2) - 63 = o$.

Les valeurs de r_p, qui appartiennent à $n = 2$ jusqu'à $n = 10$ inclusivement, sont recueillies dans la table C ci-après, avec au moins le premier des termes de correction.

Méthode d'approximation d'après laquelle des longueurs arbitraires sont données aux abscisses de quelques ordonnées, tandis que les abscisses des autres ordonnées à mesurer sont déterminées de manière que la correction, appartenant à l'aire approchée, soit un minimum.

§ 29. En déterminant l'aire I d'une figure, telles circonstances peuvent se présenter qui empêchent ou du moins ne rendent pas avantageux d'appliquer sans modification la méthode de Gauss; ainsi p. e. lorsqu'il faut mettre en compte les or-

données de certains points de la courbe AB dont les abscisses ne sont pas conformes à celles qui appartiennent aux formules du § 28; ou quand les coordonnées de quelques points de la courbe AB sont déjà connues, par exemple, quand les points extrêmes de cette courbe tombent sur l'axe X; etc. Souvent il sera recommandable d'introduire dans l'expression pour I les ordonnées extrêmes et celle du milieu de la figure tombant sur l'axe Y, parce que presque toujours les longueurs de ces trois ordonnées sont aisément calculées ou mesurées.

Il est facile, pour chacune des questions qui se présentent, de composer la formule la plus avantageuse.

Veut-on, par exemple, composer une formule pour $m=4$ dans laquelle les valeurs de r_1 et r_4 sont arbitraires, alors on a, d'après les équations sub (29), dans lesquelles $m=4$ et $q=2$:

$$\delta_8=\left\{\frac{1}{9}-\frac{2^2}{7}S_1+\frac{2^4}{5}S_2-\frac{2^6}{3}S_3+\frac{2^8}{1}S_4\right\}=o \text{ et}$$

$$\delta_{10}=\left\{\frac{1}{11}-\frac{2^2}{9}S_1+\frac{2^4}{7}S_2-\frac{2^6}{5}S_3+\frac{2^8}{3}S_4\right\}=o,$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{9}-\frac{2^2}{7}(r_1^2+r_4^2)+\frac{2^4}{5}r_1^2r_4^2\right\}-\left\{\frac{2^2}{7}-\frac{2^4}{5}(r_1^2+r_4^2)+\right.\\&\quad\left.+\frac{2^6}{3}r_1^2r_4^2\right\}(r_2^2+r_3^2)+\left\{\frac{2^4}{5}-\frac{2^6}{3}(r_1^2+r_4^2)+\right.\\&\quad\left.+\frac{2^8}{1}r_1^2r_4^2\right\}r_2^2r_3^2=o\\&\text{et}\\&\left\{\frac{1}{11}-\frac{2^2}{9}(r_1^2+r_4^2)+\frac{2^4}{7}r_1^2r_4^2\right\}-\left\{\frac{2^2}{9}-\frac{2^4}{7}(r_1^2+r_4^2)+\right.\\&\quad\left.+\frac{2^6}{5}r_1^2r_4^2\right\}(r_2^2+r_3^2)+\left\{\frac{2^4}{7}-\frac{2^6}{5}(r_1^2+r_4^2)+\right.\\&\quad\left.+\frac{2^8}{3}r_1^2r_4^2\right\}r_2^2r_3^2=o\end{aligned}\right\}\quad(44)$$

$(r_2^2+r_3^2)$ et $r_2^2 r_3^2$ peuvent être résolues de (44); si l'on pose $(r_2^2+r_3^2)=P$ et $r_2^2 r_3^2=Q$, alors r_2^2 et r_3^2 sont les racines de l'équation

$$(r^2)^2-P(r^2)+Q=o.$$

Le premîer terme de correction est représenté, d'après l'équation sub (30) dans laquelle $m=4$ et $q=2$, ainsi $(4m-2q)=(16-4)=12$, par

corr: $=\delta_{12} H^{13} a_{12}$, ainsi d'après (32):

$$\left.\begin{aligned}
\text{corr:} &= \left\{\frac{1}{13}-\frac{2^2}{11}S_1+\frac{2^4}{9}S_2-\frac{2^6}{7}S_3+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2^8}{5}S_4\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}H^{13}a_{12}=\\
&=\left[\left\{\frac{1}{13}-\frac{4}{11}(r_1^2+r_4^2)+\frac{16}{9}r_1^2r_4^2\right\}-\right.\\
&\quad-\left\{\frac{4}{11}-\frac{16}{9}(r_1^2+r_4^2)+\frac{64}{7}r_1^2r_4^2\right\}(r_2^2+r_3^2)+\\
&\quad\left.+\left\{\frac{16}{9}-\frac{64}{7}(r_1^2+r_4^2)+\frac{256}{5}\right\}r_2^2r_3^2\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{12}H^{13}a_{12};\\
&\text{ou d'après (31):}\\
\text{corr:} &= \left\{\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}-(r_1^{12}B_1+r_2^{12}B_2+r_3^{12}B_3+\right.\\
&\qquad\left.+r_4^{12}B_4)\right\}H^{13}a_{12}.
\end{aligned}\right\}\quad(45)$$

L'exactitude de l'approximation de l'aire de la figure, déterminée conformément à ce système de huit ordonnées à mesurer, diffère peu de celle obtenue si l'aire de la figure est calculée d'après un système de douze ordonnées selon la méthode de Newton-Cotes ou celle de MacLaurin. Dans ces trois cas, le degré de l'approximation est le même, seulement les coefficients des erreurs diffèrent.

Si l'on pose, par exemple, en (44) $r_1=o$ et $r_4=0{,}5$ on trouve $r_2=0{,}2344\ 2439\ 6735$ et $r_3=0{,}4151\ 1194\ 8139$.

En calculant ensuite de (27) ou de (28) les valeurs de B_p et en les substituant dans (21), on trouve pour sept ordonnées à mesurer

$$I = H\{0{,}2438\ 0952\ 381\ y_1 + \\ + 0{,}2158\ 7269\ 060(y_{-2} + y_{+2}) + \\ + 0{,}1384\ 1302\ 368(y_{-3} + y_{+3}) + \\ + 0{,}0238\ 0952\ 381(y_{-4} + y_{+4})\}$$

et, d'après une des équations sub (45):

$$\text{corr:} = -\frac{1}{951\ 3504} H^{13} a_{12} = -0{,}0000\ 0010\ 5114\ H^{13} a_{12}.$$

Si cependant la courbe AB et l'axe X se coupent dans les points A' et B' (comme le fait, par exemple, le profil d'une rivière) l'expression pour l'aire approximative de la figure se résout en

$$I = H\{0{,}2438\ 0952\ 381 y_1 + 0{,}2158\ 7269\ 060(y_{-2} + y_{+2}) + \\ + 0{,}1384\ 1302\ 368(y_{-3} + y_{+3})\};$$

dans laquelle se trouvent cinq ordonnées seulement.

Le premier terme de correction devient d'après (45):

$$\text{corr:} = \left[\left\{\frac{1}{13} - \frac{1}{11}\right\} - \left\{\frac{4}{11} - \frac{4}{9}\right\}(r_2^2 + r_3^2) + \\ + \left\{\frac{16}{9} - \frac{16}{7}\right\} r_2^2 r_3^2\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{12} H^{13} a_{12} = \\ = \left\{-\frac{1}{143} + \frac{4}{99}(r_2^2 + r_3^2) - \frac{16}{63} r_2^2 r_3^2\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{11} H^{13} a_{12},$$

ou

$$\text{corr:} = \left\{\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - (r_2^{12} B_2 + r_3^{12} B_3 + r_4^{12} B_4)\right\} H^{13} a_{12}.$$

Par conséquent, dans ce cas-ci cinq ordonnées à mesurer donnent une exactitude à peu près aussi grande que douze selon MacLaurin et même que six selon la méthode primitive de Gauss.

§ 30. Si l'on veut introduire dans l'expression pour I les ordonnées extrêmes et celle du milieu de la figure appartenant aux abscisses $x_{\mp m} = \mp \frac{1}{2} H$ et $x_1 = o$, alors (29) devient, puisque $S_m = o$:

$$\delta_{2m} = \frac{1}{2m+1} - \frac{2^2}{2m-1} S_1 + \frac{2^4}{2m-3} S_2 -$$
$$- \ldots (-1)^{m-1} . \frac{2^{2m-2}}{3} S_{m-1} = o,$$

$$\delta_{2m+2} = \frac{1}{2m+3} - \frac{2^2}{2m+1} S_1 + \frac{2^4}{2m-1} S_2 -$$
$$- \ldots (-1)^{m-1} . \frac{2^{2m-2}}{5} S_{m-1} = o,$$

. . . .

$$\delta_{4m-6} = \frac{1}{4m-5} - \frac{2^2}{4m-7} S_1 + \frac{2^4}{4m-9} S_2 -$$
$$- \ldots (-1)^{m-1} . \frac{2^{2m-2}}{2m-3} S_{m-1} = o,$$

d'où l'on trouve pour

$$m=3: \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right) - 2^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) r_2^2 = o,$$

ainsi $r_1 = o$, $r_2 = 0{,}3273\ 26835\ldots.$ et $r_3 = 0{,}5$;

$$m=4: \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7}\right) - 2^2 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right)(r_2^2 + r_3^2) + 2^4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) r_2^2 r_3^2 = o,$$

$$\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{9}\right) - 2^4 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7}\right)(r_2^2 + r_3^2) + 2^4 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right) r_2^2 r_3^2 = o,$$

ainsi $r_1 = o$, $r_2 = 0{,}2344\ 2439\ 6735\ldots$, $r_3 = 0{,}4151\ 1194\ 8139\ldots$ et $r_4 = 0{,}5$;

$$m=5: \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{9}\right) - 2^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7}\right)(r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) +$$
$$+ 2^4 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right)(r_2^2 r_3^2 + r_2^2 r_4^2 + r_3^2 r_4^2) -$$
$$- 2^6 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) r_2^2 r_3^2 r_4^2 = o,$$

$$\left(\frac{1}{13} - \frac{1}{11}\right) - 2^2 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{9}\right)(r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) +$$
$$+ 2^4 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7}\right)(r_2^2 r_3^2 + r_2^2 r_4^2 + r_3^2 r_4^2) -$$
$$- 2^6 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right) r_2^2 r_3^2 r_4^2 = o,$$

$$\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{13}\right)-2^2\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{11}\right)(r_2^2+r_3^2+r_4^2)+$$
$$+2^4\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{9}\right)(r_2^2r_3^2+r_2^2r_4^2+r_3^2r_4^2)-$$
$$-2^6\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{7}\right)r_2^2r_3^2r_4^2=o,$$

ainsi $r_1=o$, $r_2=0{,}1815\ 58732\ldots$, $r_3=0{,}3385\ 93140\ldots$, $r_4=0{,}4498\ 78998\ldots$ et $r_5=0{,}5$; etc.

Les formules pour I, fondées sur les valeurs de r_p calculées ainsi, ne donnent pas le résultat le plus exact qu'on puisse obtenir, parce que, d'après une telle formule pour I, les longueurs des abscisses doivent être exprimées par un nombre indéfiniment grand de décimales, tandis qu'on ne peut en mettre en compte qu'un nombre relativement petit. Les longueurs qu'on a calculées ne sont pas celles des ordonnées qu'on a en vue dans l'expression pour I. On y peut remédier de la manière suivante.

Prenons, par exemple, les valeurs de r_p pour $m=5$, trouvées ci-dessus, notamment

$r_1=o$,
$r_2=0{,}1815\ 58732\ldots.$,
$r_3=0{,}3385\ 93140\ldots.$,
$r_4=0{,}4498\ 78998\ldots..$ et
$r_5=0{,}5$.

Or, au lieu d'exprimer les valeurs r_2, r_3 et r_4 chacune en particulier dans un nombre très grand de décimales, nous prenons pour les deux valeurs r_3 et r_4:

$$r_3=0{,}338\ 593 \text{ et } r_4=0{,}449\ 879,$$

ainsi, nous y supprimons toutes les décimales qui suivent la sixième. Ensuite nous calculons de la première des équations sub (29) la valeur la plus avantageuse pour r_2, exacte seulement aux 6 ou 7 premières décimales, en supprimant les décimales suivantes. Nous posons donc

$r_1=o$,
$r_2=$(à calculer ci-après),
$r_3=0{,}338\ 593$,
$r_4=0{,}449\ 879$ et
$r_5=0{,}5$,

et nous trouvons de la première des équations sub (29), dans laquelle $m=5$ et $q=4$:

$$\delta_{2m}=\frac{1}{2m+1}-\frac{2^2}{2m-1}S_1+\frac{2^4}{2m-3}S_2-$$
$$-\ldots(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-2}}{3}S_{m-1}=o$$

ou

$$\delta_{10}=\frac{1}{11}-\frac{4}{9}S_1+\frac{16}{7}S_2-\frac{64}{5}S_3+\frac{256}{3}S_4=o$$

et de la dernière égalité

$$r_2^2=\frac{\frac{1}{11}-\frac{4}{9}(r_3^2+r_4^2+r_5^2)+\frac{16}{7}(r_3^2r_4^2+r_3^2r_5^2+r_4^2r_5^2)-\frac{64}{5}r_3^2r_4^2r_5^2}{\frac{4}{9}-\frac{16}{7}(r_3^2+r_4^2+r_5^2)+\frac{64}{5}(r_3^2r_4^2+r_3^2r_5^2+r_4^2r_5^2)-\frac{256}{3}r_3^2r_4^2r_5^2}=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{9}\right)-4\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{7}\right)(r_3^2+r_4^2)+16\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right)r_3^2r_4^2}{4\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{7}\right)-16\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right)(r_3^2+r_4^2)+64\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)r_3^2r_4^2}=$$
$$=0,\ 0329\ 6348\ 75\ldots$$

$$\text{donc } r_2=0{,}1815\ 58496\ldots.$$

c'est pourquoi nous écrivons $r_2=0{,}181\ 5585$; de sorte que l'on a

$$r_1=0,$$
$$r_2=0{,}181\ 5585,$$
$$r_3=0{,}338\ 593,$$
$$r_4=0{,}449\ 879 \text{ et}$$
$$r_5=0{,}5.$$

Puis on trouve d'après (27)

$$B_p=\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6\Sigma_1+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4\Sigma_2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\Sigma_3+\Sigma_4}{r_p^8-r_p^6\Sigma_1+r_p^4\Sigma_2-r_p^2\Sigma_3+\Sigma_4}$$

d'où

$$B_1 = 0{,}1857\ 5931\ 2020,$$
$$B_2 = 0{,}3464\ 2837\ 1988,$$
$$B_3 = 0{,}2745\ 3909\ 2122,$$
$$B_4 = 0{,}1654\ 9547\ 2030 \text{ et}$$
$$B_5 = 0{,}0277\ 7775\ 1840;$$

ainsi $I = H\{0{,}1857\ 5931\ 2020\ y_1 +$
$+ 0{,}1732\ 1418\ 5994\ (y_{-2} + y_{+2}) +$
$+ 0{,}1372\ 6954\ 6061\ (y_{-3} + y_{+3}) +$
$+ 0{,}0827\ 4773\ 6015\ (y_{-4} + y_{+4}) +$
$+ 0{,}0138\ 8887\ 5920\ (y_{-5} + y_{+5})\}$.

Enfin on trouve, pour la correction:

corr: $= -0{,}0000\ 0000\ 0000\ H^{11} a_{10} -$
$- 0{,}0000\ 0000\ 0000\ H^{13} a_{12} -$
$- 0{,}0000\ 0000\ 0000\ H^{15} a_{14} -$
$- 0{,}0000\ 0000\ 0400\ H^{17} a_{16} -$
$- 0{,}0000\ 0000\ 0429\ H^{19} a_{18} - \ldots\ldots$

Les valeurs de I et de corr: pour $m = 3$, 4, 5 et 6, calculées suivant la méthode que nous venons de développer, sont réunies dans la table D ci-après.

§ 31. Nous ferons voir l'exactitude des formules tirées de la méthode d'approximation développée dans le § précédent, en calculant la valeur approchée I dans le cas de $n = 5$ ordonnées, de l'intégrale $\int \frac{dx'}{l(x')}$ entre les limites $x' = 100\ 000$ et $x' = 200\ 000$. Pour la valeur de cette intégrale Gauss a trouvé, suivant la méthode d'approximation développée par lui, à l'aide de

2	ordonnées:	8405, 9546 . . . ,
3	»	8406, 23678 . . ,
4	»	8406, 24297 . . ,
5	»	8406, 243117 . ,
6	»	8406, 243121 . et
7	»	8406, 2431211.

Puisque nous avons placé l'axe Y au milieu de la figure, nous devons poser $x' = 100\ 000 \left(\frac{3}{2} + x'\right)$, de sorte que l'intégrale se change en

$$I = 100\ 000 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{l.\,100\ 000 + l.\,(\frac{3}{2} + x)},$$

ou, si les logarithmes népériens dans le dénominateur sont remplacés par des logarithmes ordinaires et si le module est représenté par M en

$$I = 100\ 000\ M \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{5 + log.\,(\frac{3}{2} + x)}.$$

Nous avons ainsi

$$y = \frac{1}{5 + log.\,(\frac{3}{2} + x)},$$

$$I = 100\ 000\ M \{0{,}3555\ 5586\ 8534\ y_1 + \\ + 0{,}2722\ 2215\ 3758\ (y_{-2} + y_{+2}) + \\ + 0{,}0499\ 9991\ 1975\ (y_{-3} + y_{+3})\},$$

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0{,}327\ 327,$$
$$x_3 = 0{,}5 \text{ et}$$
$$M = 0{,}4342\ 9448\ 19033,$$

d'où nous trouvons successivement

$$y_{-3} = \frac{1}{5 + log.\,1} = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

$$y_{-2} = \frac{1}{5 + log.\,1{,}172\ 673} = \frac{1}{5{,}0691\ 7692\ 593} = \\ = 0{,}1972\ 7068\ 4099,$$

$$y_1 = \frac{1}{5 + log.\,1{,}5} = \frac{1}{5{,}1760\ 9125\ 906} = \\ = 0{,}1931\ 9597\ 5486,$$

$$y_{+2} = \frac{1}{5 + log.\,1{,}827\ 327} = \frac{1}{5{,}2618\ 1627\ 126} = \\ = 0{,}1900\ 4844\ 4956 \text{ et}$$

$$y_{+3} = \frac{1}{5 + \log. 2} = \frac{1}{5{,}3010\ 2999\ 566} =$$
$$= 0{,}1886\ 4258\ 4708;$$

par conséquent

$$I = 8406{,}243312,$$

ce qui ne diffère que de 0,0002 du résultat trouvé par Gauss pour le même nombre d'ordonnées, mais d'une manière plus difficile.

La correction exprimée en fonction de quotients différentiels d'ordre impair.

§ 32. On peut remplacer les termes de correction sub (30) par des termes exprimés en fonction de quotients différentiels d'ordre impair permettant quelquefois un calcul plus facile que ceux qui sont affectés des coefficients a_p de la série sub (19).

En effet, supposons que $y = f(x)$ soit développé comme sub(19) dans la série

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \text{etc.}$$

Il résulte de cette équation, si l'on représente

$$f_{2m-1}\left(\frac{1}{2}H\right) - f_{2m-1}\left(-\frac{1}{2}H\right) \text{par } F_{2m-1},$$
$$f_{2m+1}\left(\frac{1}{2}H\right) - f_{2m+1}\left(-\frac{1}{2}H\right) \text{par } F_{2m+1},$$

etc. et le produit continu

$2.3.4.5.6\ldots(2m)$ par $2\ldots(2m)$,
$4.5.6.7.8\ldots(2m+2)$ par $4\ldots(2m+2)$, etc.

$$F_{2m-1} = 2\left\{2\ldots(2m)\,a_{2m}\left(\frac{1}{2}H\right) + 4\ldots(2m+2)\,a_{2m+2}\left(\frac{1}{2}H\right)^3 + \right.$$
$$\left. + 6\ldots(2m+4)\,a_{2m+4}\left(\frac{1}{2}H\right)^5 + \ \ldots\ldots\ldots \right\};$$

$$F_{2m+1}=2\left\{2\ldots(2m+2)\,a_{2m+2}\left(\frac{1}{2}H\right)+\right.$$
$$+4\ldots(2m+4)\,a_{2m+4}\left(\frac{1}{2}H\right)^3+$$
$$\left.+6\ldots(2m+6)\,a_{2m+6}\left(\frac{1}{2}H\right)^5+\ldots\ldots\ldots\right\};$$
$$F_{2m+3}=2\left\{2\ldots(2m+4)\,a_{2m+4}\left(\frac{1}{2}H\right)+\right.$$
$$+4\ldots(2m+6)\,a_{2m+6}\left(\frac{1}{2}H\right)^3+$$
$$\left.+6\ldots(2m+8)\,a_{2m+8}\left(\frac{1}{2}H\right)^5+\ldots\ldots\ldots\right\};$$

etc.

Si maintenant on a tiré de la formule (30) pour la correction de quelque formule d'approximation

$$\text{corr:}=p_1\,H^{2m+1}a_{2m}+p_2\,H^{2m+3}a_{2m+2}+p_3\,H^{2m+5}a_{2m+4}+\ldots$$

il est évident qu'on peut poser aussi l'équation

$$\text{corr:}=z_1\,H^{2m}F_{2m-1}+z_2\,H^{2m+2}F_{2m+1}+z_3\,H^{2m+4}F_{2m+3}+\ldots$$

dans laquelle z_1, z_2, z_3,... sont des inconnues, dont les valeurs peuvent être déterminées aisément, car on a

$$z_1\,H^{2m}\,2\left\{2\ldots(2m)\,a_{2m}\left(\frac{1}{2}H\right)\right\}=p_1\,H^{2m+1}\,a_{2m};$$
$$z_1\,H^{2m}\,2\left\{4\ldots(2m+2)\,a_{2m+2}\left(\frac{1}{2}H\right)^3\right\}+$$
$$+z_2\,H^{2m+2}\,2\left\{2\ldots(2m+2)\,a_{2m+2}\left(\frac{1}{2}H\right)\right\}=p_2\,H^{2m+3}\,a_{2m+2};$$
$$z_1\,H^{2m}\,2\left\{6\ldots(2m+4)\,a_{2m+2}\left(\frac{1}{2}H\right)^5\right\}+$$
$$+z_2\,H^{2m+2}\,2\left\{4\ldots(2m+4)\,a_{2m+4}\left(\frac{1}{2}H\right)^3\right\}+$$
$$+z_3\,H^{2m+4}\,2\left\{2\ldots(2m+4)\,a_{2m+4}\left(\frac{1}{2}H\right)\right\}=p_3\,H^{2m+5}\,a_{2m+4};$$

etc. ou

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^0 z_1\right\}.\left\{2\ldots(2m)\right\}=p_1;$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 z_1 + 2.3\left(\frac{1}{2}\right)^0 z_2\right\}.\left\{4\ldots(2m+2)\right\} = p_2;$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4 z_1 + 4.5\left(\frac{1}{2}\right)^2 z_2 + 2.3.4.5\left(\frac{1}{2}\right)^0 z_3\right\}.\left\{6\ldots(2m+4)\right\} = p_3;$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6 z_1 + 6.7\left(\frac{1}{2}\right)^4 z_2 + 4.5.6.7\left(\frac{1}{2}\right)^2 z_3 + \right.$$
$$\left. + 2.3.4.5.6.7\left(\frac{1}{2}\right)^0 z_4\right\}.\left\{8\ldots(2m+6)\right\} = p_4;$$

etc. pour le calcul de z_1, z_2, z_3, etc.

On trouve

$$z_1 = \frac{1}{2\ldots(2m)}\,p_1;$$

$$z_2 = \frac{1}{2\ldots(2m+2)}\,p_2 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 z_1;$$

$$z_3 = \frac{1}{2\ldots(2m+4)}\,p_3 - \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left\{z_1 + 4.5.2^2.\,z_2\right\};$$

$$z_4 = \frac{1}{2\ldots(2m+6)}\,p_4 - \frac{1}{2\ldots7}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left\{z_1 + 6.7.2^2.\,z_2 + \right.$$
$$\left. + 4.5.6.7.2^4.\,z_3\right\};$$

$$z_5 = \frac{1}{2\ldots(2m+8)}\,p_5 - \frac{1}{2\ldots9}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left\{z_1 + 8.9.2^2 z_2 + \right.$$
$$\left. + 6.7.8.9.2^4.\,z_3 + 4\ldots9.2^6.\,z_4\right\};$$

etc.

En appliquant ces expressions, par exemple, à la formule de Newton-Cotes pour $n = 5$, on a, d'après la table A:

$$p_1 = -\frac{1}{2.3.\overline{4}^3.7};\ p_2 = -\frac{17}{2.\overline{3}^2.\overline{4}^5.5};\ p_3 = -\frac{23}{2.\overline{4}^7.11}\ \text{et}$$

$$p_4 = -\frac{1967}{2.3.\overline{4}^9.5.13};$$

par conséquent

$$z_1 = \frac{1}{2.3.4.5.6}.-\frac{1}{2.3.\overline{4}^3.7} = -\frac{1}{2.\overline{3}^3.\overline{4}^5.5.7};$$

$$z_2 = \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}.-\frac{17}{2.\overline{3}^2.\overline{4}^5.5} + \frac{1}{2.3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2.\overline{3}^3.\overline{4}^5.5.7} = \frac{1}{\overline{3}^2.\overline{4}^9.5};$$

etc. de sorte qu'on a aussi:

$$\text{corr:} = -\frac{H^6}{2.\overline{3}^3.\overline{4}^5.5.7}\left\{f_5\left(\frac{1}{2}\right) - f_5\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{H^8}{\overline{3}^2.\overline{4}^9.\overline{5}^2}\left\{f_7\left(\frac{1}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - f_7\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} - \frac{17\,H^{10}}{2.\overline{3}^4.\overline{4}^{11}.5.11}\left\{f_9\left(\frac{1}{2}\right) - f_9\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{36\,4157\,H^{12}}{2.\overline{3}^6.\overline{4}^{14}.\overline{5}^3.\overline{7}^2.13}\left\{f_{11}\left(\frac{1}{2}\right) - f_{11}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \ldots (46)$$

Formules dont les termes de correction peuvent être calculés plus facilement que ceux appartenant aux formules d'après **Newton-Cotes, MacLaurin** *et* **Gauss.**

§ 33. Si, dans le calcul de l'aire approximative I, on veut décidément se servir de quelques termes de correction, il est préférable de ne pas poser en (23) les premiers m termes égaux à zéro — comme nous l'avons fait en (26) — et de déterminer les valeurs de B_p des m équations qui sont obtenues de cette manière; car la valeur de δ_{2p} est notablement plus importante que celle de δ_{2p+2}, pour peu que la convergence de la série sub (19) soit rapide. Dans ce cas-ci, il vaut mieux (voyez le § 17) poser, par exemple, la valeur de δ_0 en (23) égale à zéro et attribuer à chacune des grandeurs δ_2, δ_4, etc. une certaine valeur qui sera calculée plus tard, pour poser ensuite les valeurs des $(m-1)$ grandeurs δ_{2p} suivantes égales à zéro. De l'équation $\delta_0 = o$ et des $(m-1)$ équations $\delta_{2p} = o$, on peut calculer les m valeurs de B_p et de celles-ci l'expression pour I, ainsi que les termes de correction.

Les termes de correction trouvés ainsi, ont pour facteur a_2, a_4, etc., tandis que ceux qui appartiennent p. e. aux formules de la table A, ont pour facteurs a_{2m}, a_{2m+2}, etc., et il est clair que les premiers facteurs se calculent plus promptement que les derniers.

Surtout si les formules de Gauss sont modifiées dans le sens indiqué, l'avantage pourra être assez considérable. —

Pour expliquer, par un exemple, ce que nous avons proposé ci-dessus, nous supposons qu'on veut appliquer des termes de correction pour la formule à trois ordonnées à mesurer d'après la méthode de Newton-Cotes; nous posons

$$1 \quad - \quad B_1 - \quad B_2 = o,$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - r_1^2\, B_1 - r_2^2\, B_2 = \delta_2,$$
$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - r_1^4\, B_1 - r_2^4\, B_2 = o,$$
$$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - r_1^6\, B_1 - r_2^6\, B_2 = \delta_6,$$
$$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^8 - r_1^8\, B_1 - r_2^8\, B_2 = \delta_8 \text{ et}$$
$$\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - r_1^{10}\, B_1 - r_2^{10}\, B_2 = \delta_{10}.$$

Il résulte de la 1ère et de la 3ème de ces équations, puisque $r_1 = o$ et $r_2 = \frac{1}{2}$,

$$B_1 + B_2 = 1 \text{ et } \frac{1}{16}\, B_2 = \frac{1}{80}, \text{ d'où } B_1 = \frac{4}{5} \text{ et } B_2 = \frac{1}{5},$$

de sorte que nous trouvons

$$I = \frac{H}{10}\left\{8\, y_1 + (y_{-2} + y_{+2})\right\} + \frac{1}{30}\, H^3\, a_2 - \frac{1}{1120}\, H^7\, a_6 - \\ - \frac{1}{2880}\, H^9\, a_8 - \frac{3}{28160}\, H^{11}\, a_{10} - \ldots. \quad (47)$$

tandis que la formule pour $n = 3$ de la table A donne

$$I = \frac{H}{6}\left\{4\, y_1 + (y_{-2} + y_{+2})\right\} - \frac{1}{120}\, H^5\, a_4 - \frac{1}{336}\, H^7\, a_6 - \\ - \frac{1}{1152}\, H^9\, a_8 - \frac{1}{4224}\, H^{11}\, a_{10} - \ldots.$$

En faisant usage soit d'un seul terme, soit de deux, de trois ou de quatre termes de correction, la formule (47) est plus exacte que celle pour $n = 3$ et même que celle pour $n = 4$ de la table A, puisque nous avons pour $n = 4$:

$$I = \frac{H}{8}\left\{3\,(y_{-1} + y_{+1}) + (y_{-2} + y_{+2})\right\} - \frac{1}{270}\, H^5\, a_4 - \\ - \frac{1}{592}\, H^7\, a_6 - \frac{1}{1842}\, H^9\, a_8 - \frac{1}{6436}\, H^{11}\, a_{10} - \ldots$$

Et, comme nous l'avons déjà fait observer, la valeur de $\frac{1}{30} H^3 a_2$ est plus promptement calculée que celle de $\frac{1}{120} H^5 a_4$ pour $n = 3$ et que celle de $\frac{1}{270} H^5 a_4$ pour $n = 4$.

En appliquant la formule (47) à l'intégrale $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{8\frac{1}{2} + x}$ du § 22, on trouve

$$I = \frac{1}{10}\left\{8 y_1 + (y_{-2} + y_{+2})\right\} = 0{,}1177\ 2875\ 8170 \ldots .$$

$$+ \frac{1}{30}\left(\frac{2}{17}\right)^3 \qquad = 0{,}0000\ 5427\ 7766 \ldots .$$

$$I = 0{,}1177\ 8303\ 5936 \ldots .$$

exacte aux neuf premières décimales. Cette valeur de I est plus exacte que toutes celles trouvées dans le § 22.

Pour $n = 3$ ordonnées à mesurer, on trouve encore

$$I = \frac{H}{14}\left\{12 y_1 + (y_{-2} + y_{+2})\right\} + \frac{1}{21} H^3 a_2 + \\ + \frac{1}{280} H^5 a_4 - \frac{1}{8064} H^9 a_8 - \ldots .$$

et aussi

$$I = \frac{H}{18}\left\{16 y_1 + (y_{-2} + y_{+2})\right\} + \frac{1}{18} H^3 a_2 + \frac{1}{180} H^5 a_4 + \\ + \frac{1}{2016} H^7 a_6 - \frac{1}{5\,0688} H^{11} a_{10} - \ldots .$$

Pour $n = 5$ on trouve

$$I = \frac{H}{210}\left\{- 72 y_1' + 128 (y_{-2} + y_{+2}) + 13 (y_{-3} + y_{+3})\right\} - \\ - \frac{1}{42} H^3 a_2 - \frac{11}{16\,1280} H^9 a_8 + \frac{45}{60\,0784} H^{11} a_{10} + \ldots .$$

et aussi

$$I = \frac{H}{378}\left\{- 684 y_1 + 512 (y_{-2} + y_{+2}) + 19 (y_{-3} + y_{+3})\right\} - \\ - \frac{1}{9} H^3 a_2 - \frac{11}{2520} H^5 a_4 + \frac{137}{141\,9264} H^{11} a_{10} + \ldots .$$

Etc. Il me semble que des tables destinées uniquement à l'application de formules soit à un terme, soit à deux termes, etc. de correction, ceux-ci étant recueillis aussi dans la forme indiquée au § 32, ne seraient pas sans valeur.

§ 34. Nous allons ici examiner le cas de plus près.

Les $2m$ grandeurs B_p et r_p sont déterminées des $2m$ équations qui se présentent quand on pose en (22) [voyez aussi (23)] les coefficients $\delta_{2p}, \delta_{2p+2}, \ldots \delta_{2q+4m}$, de $2m$ termes de correction consécutifs, chacun en particulier égal à zéro. La somme des termes [voyez (22) et (23)] $\delta_0 H a_0 + \delta_2 H^3 a_2 + + \ldots + \delta_{2p-2} H^{2p-1} a_{2p-2}$ forme alors la partie de la correction qui doit être calculée; elle est représentée par

$$\begin{aligned}
&\Big\{ \quad 1 \quad -(\quad B_1 + \quad B_2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + \quad B_m)\Big\} H a_0 + \\
&+\Big\{ \quad \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad -(\, r_1^2 B_1 + \, r_2^2 B_2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + \, r_m^2 B_m)\Big\} H^3 a_2 + \\
&+\Big\{ \quad \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad -(\, r_1^4 B_1 + \, r_2^4 B_2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + \, r_m^4 B_m)\Big\} H^5 a_4 + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\Big\{\frac{1}{2q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q-2} -(r_1^{2q-2} B_1 + r_2^{2q-2} B_2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + r_m^{2q-2} B_m)\Big\} H^{2q-1} a_{2q-2}
\end{aligned}$$

et la correction restante par

$$\begin{aligned}
&\Big\{\frac{1}{2q+4m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q+4m} -(r_1^{2q+4m} B_1 + r_2^{2q+4m} B_2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + r_m^{2q+4m} B_m)\Big\} H^{2q+4m+1} a_{2q+4m} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;
\end{aligned}$$

tandis que les grandeurs B_p et r_p doivent être calculées du groupe suivant de $2m$ équations

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2q+1}\left(\frac{2}{1}\right)^{2q} &= r_1^{2q} B_1 + r_2^{2q} B_2 + \\
&+ \ldots + r_m^{2q} B_m, \\
\frac{1}{2q+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q+2} &= r_1^{2q+2} B_1 + r_2^{2q+2} B_2 + \\
&+ \ldots + r_m^{2q+2} B_m, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{2q+4m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q+4m-2} &= r_1^{2q+4m-2} B_1 + r_2^{2q+4m-2} B_2 + \\
&+ \ldots + r_m^{2q+4m-2} B_m.
\end{aligned}$$

Nous trouvons des m premières équations de ce groupe, avec une même notation que sub (27),

$$B_p = \frac{\frac{1}{2q+2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q+2m-2} - \frac{1}{2q+2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q+2m-4}\Sigma_1 + \frac{1}{2q+2m-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q+2m-6}\Sigma_2 - \ldots (-1)^{m-1}\frac{1}{2q+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q}\Sigma_{m-1}}{r_p^{2q}\left\{r_p^{2m-2} - r_p^{2m-4}\Sigma_1 + r_p^{2m-6}\Sigma_2 - \ldots (-1)^{m-1}\Sigma_{m-1}\right\}}$$

et, par la substitution de la valeur trouvée de B_p dans les m équations restantes de ce groupe, il résulte que les m inconnues r_p sont les racines de l'équation

$$r^{2m} - S_1 r^{2m-2} + S_2 r^{2m-4} - \ldots (-1)^m S_m = o$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{2q+2m-1}{2q+4m-1}, \\
S_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{2q+2m-3}{2q+4m-3} S_1, \\
S_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{2q+2m-5}{2q+4m-5} S_2, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
S_m &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{2q+1}{2q+2m+1} \cdot S_{m-1}.
\end{aligned}$$

Prenons, comme application, le cas de $m=4$ et $q=4$, nous trouvons alors successivement

$$r^8 - S_1 r^6 + S_2 r^4 - S_3 r^2 + S_4 = o$$

où

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{15}{23} \qquad = \frac{15}{23},$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{13}{21} \cdot \frac{15}{23} \quad = \frac{195}{1288},$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{195}{1288} = \frac{715}{48944} \text{ et}$$

$$S_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{715}{48944} = \frac{6435}{1331\ 2768};$$

par conséquent

$$1331\ 2768\, r^8 - 868\ 2240\ r^6 + 201\ 5520\, r^4 - \\ - 19\ 4480\, r^2 + 6435 = 0$$

d'où

$$r_1 = 0{,}2681\ 3959\ 9703\ 544,$$
$$r_2 = 0{,}3736\ 4060\ 6807\ 160,$$
$$r_3 = 0{,}4478\ 3803\ 7494\ 795 \text{ et}$$
$$r_4 = 0{,}4900\ 0903\ 7908\ 374.$$

Ensuite nous avons

$$B_p = \frac{\frac{1}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{14} - \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\Sigma_1 + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\Sigma_2 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\Sigma_3}{r_p\,\{r_p{}^6 - r_p{}^4\Sigma_1 + r_p{}^2\Sigma_2 - \Sigma_3\}} =$$

$$= \frac{1287 - 5940\,\Sigma_1 + 28080\,\Sigma_2 - 137280\,\Sigma_3}{3162\ 93120\, r_p{}^8\,\{r_p{}^6 - r_p{}^4\Sigma_1 + r_p{}^2\Sigma_2 - \Sigma_3\}},$$

d'où

$$B_1 = 0{,}24573\ 09704\ 94268\ 23618\ 56592\ 86409\ 18,$$
$$B_2 = 0{,}17927\ 94567\ 65207\ 31641\ 20434\ 91208\ 60,$$
$$B_3 = 0{,}11699\ 45801\ 17100\ 38842\ 87511\ 36325\ 12 \text{ et}$$
$$B_4 = 0{,}05116\ 63893\ 48337\ 93766\ 89580\ 80000\ 95,$$

ainsi

$$I = 0{,}40682\ 86032\ 75086\ 12130\ 45880\ 06056\ 15\ H a_0 +$$
$$+ 0{,}00488\ 70304\ 57176\ 16718\ 89862\ 21493\ 31\ H^3 a_2 +$$
$$+ 0{,}00007\ 96816\ 54403\ 25129\ 91671\ 70572\ 80\ H^5 a_4 +$$
$$+ 0{,}00000\ 08831\ 71046\ 34177\ 25201\ 65324\ 18\ H^7 a_6 +$$
$$+ H \left\{ \begin{array}{l} 0{,}12286\ 54852\ 47134\ 11809\ 28296\ 43204\ 59\ (y_{-1} + y_{+1}) \\ 0{,}08963\ 97283\ 82603\ 65820\ 60217\ 45604\ 30\ (y_{-2} + y_{+2}) \\ 0{,}05849\ 72900\ 58550\ 19421\ 43755\ 68162\ 56\ (y_{-3} + y_{+3}) \\ 0{,}02558\ 31946\ 74168\ 96883\ 44790\ 40000\ 48\ (y_{-4} + y_{+4}) \end{array} \right\}$$

et la correction restante est égale à

$$\text{corr:} = 0{,}00000\ 00000\ 09815\ H^{25} a_{24} + \ldots .$$

Pour donner une preuve de l'exactitude de cette formule, nous allons l'appliquer au calcul de la valeur approchée de l'intégrale du § 22, c'est à dire

$$I' = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{8\frac{1}{2} + x} =$$

$$= 0{,}11778\ 30356\ 56383\ 45453\ 87941\ 09470\ 52171 \ldots .$$

Nous avons

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots . + a_p x^p + \ldots . =$$
$$= \frac{1}{8\frac{1}{2} + x} = \left(\frac{2}{17}\right) - \left(\frac{2}{17}\right)^2 x + \left(\frac{2}{17}\right)^3 x^2 - \left(\frac{2}{17}\right)^4 x^3 +$$
$$+ \ldots (-1)^p \left(\frac{2}{17}\right)^{p+1} x^p \ldots .$$

et trouvons

$$y_{-1} + y_{+1} = 0{,}23552\ 85014\ 14527\ 39802\ 31708\ 55950\ 08 \ldots$$
$$y_{-2} + y_{+2} = 0{,}23574\ 96522\ 23434\ 19159\ 26959\ 06576\ 62 \ldots$$
$$y_{-3} + y_{+3} = 0{,}23594\ 90891\ 57428\ 84523\ 90237\ 16937\ 51 \ldots \text{et}$$
$$y_{-4} + y_{+4} = 0{,}23607\ 86793\ 34419\ 39542\ 42817\ 83785\ 25 \ldots$$

Il y a ensuite

$$a_0 = \left(\frac{2}{17}\right),\ a_2 = \left(\frac{2}{17}\right)^3,\ a_4 = \left(\frac{2}{17}\right)^5,\ a_6 = \left(\frac{2}{17}\right)^7 \text{ et } a_{24} = \left(\frac{2}{17}\right)^{25},$$

d'où l'on trouve alors facilement

$$
\begin{aligned}
I = & \ 0{,}04786\ 21886\ 20598\ 36721\ 23044\ 71300\ 72 + \\
+ & \ 0{,}00000\ 79577\ 12931\ 69333\ 14699\ 51174\ 42 + \\
+ & \ 0{,}00000\ 00017\ 95823\ 76317\ 05457\ 47458\ 69 + \\
+ & \ 0{,}00000\ 00000\ 00275\ 49412\ 56335\ 02944\ 48 + \\
+ & \left\{\begin{matrix} 0{,}02893\ 83236\ 15826\ 22328\ 67099\ 36102\ 28 \\ 0{,}02113\ 25347\ 91601\ 91552\ 17524\ 57754\ 56 \\ 0{,}01380\ 23823\ 07492\ 83580\ 91847\ 65162\ 07 \\ 0{,}00603\ 96468\ 11833\ 16208\ 11932\ 79573\ 18 \end{matrix}\right\} = \\
= & \ \mathbf{0{,}11778\ 30356\ 56383\ 45453\ 87941\ 09470}\ 40
\end{aligned}
$$

ce qui ne diffère de la vraie valeur qu'à la 31ème décimale.

La correction restante est égale à

$$\text{corr:} = 0{,}00000\ 00000\ 09815 \left(\frac{2}{17}\right)^{25} + \ldots\ldots =$$

$$= 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 5684 + \ldots,$$

d'où il résulte que si B_p et $(y_{-p} + y_{+p})$ étaient exprimées par un nombre suffisamment grand de décimales, on pourrait, avec la formule développée dans ce §-ci, calculer la valeur de $l.\ \frac{9}{8}$ exacte à 35 décimales.

Observations touchant les formules de **Newton-Cotes, MacLaurin** *et* **Gauss.**

§ 35. La comparaison des résultats dans le § 22 pour $n = 3$ et $n = 4$ montre qu'on n'obtient pas d'avantage bien grand en suivant la méthode de Newton-Cotes ou celle de MacLaurin, si l'on prend, au lieu d'un nombre impair d'ordonnées à mesurer, le nombre pair suivant. En outre on peut voir, par les tables A et B, que, si l'on passe d'un nombre pair d'ordonnées à mesurer au nombre impair ou au nombre pair immédiat, l'erreur probable de l'approximation, dans les deux cas, diminue de deux degrés.

Il faut observer ensuite:

1° que toutes les valeurs de corr: en a_p de la table A sont négatives et celles de la table B positives, et

2° que, pour $n = 2$ jusqu'à $n = 6$ inclusivement, les formules de Newton-Cotes sont moins exactes que celles de

MacLaurin, mais dans une proportion qui diminue à mesure que n s'approche davantage de 6; que pour $n = 7$ les formules des deux méthodes ont une exactitude à peu près égale; que pour $n = 8$, 9 et 10 les formules de Newton-Cotes donnent une plus grande exactitude que celles de MacLaurin, et que la différence augmente avec n.

§ 36. Les formules de Newton-Cotes et de MacLaurin présentent un grand avantage en ce que leurs valeurs de r_p sont exprimées en fractions simples. Cependant, il est possible de remplacer quelques-unes des fractions adoptées sub (33) et (34) par d'autres, ou d'en ajouter encore quelques-unes, de telle manière qu'avec un même nombre d'ordonnées et une même simplicité de calcul, l'exactitude de la formule augmente.

Supposons, par exemple, que, dans la formule de MacLaurin, pour $n = 3$ soient recueillies aussi les ordonnées des points extrêmes de la courbe $A\,B$, nous trouvons alors pour $r_1 = o$, $r_2 = \frac{1}{3}$ et $r_3 = \frac{1}{2}$, de (21), (27) ou (28) et (35)

$$I = \frac{H}{300}\left\{110\, y_1 + 81\,(y_{-2} + y_{+2}) + 14\,(y_{-3} + y_{+3})\right\} + \\ + \frac{1}{3\,0240} H^7 a_6 - \frac{1}{7\,7760} H^9 a_8 - \ldots .$$

Non seulement cette formule est d'une application facile, mais elle est, en outre, aussi bien avec un terme qu'avec deux termes de correction, sensiblement plus exacte qu'une des formules des tables A et B pour $n = 5$ et $n = 6$, notamment

$$I = \frac{H}{90}\left\{12\, y_1 + 32\,(y_{-2} + y_{+2}) + 7\,(y_{-3} + y_{+3})\right\} - \\ - \frac{1}{2688} H^7 a_6 - \frac{1}{5421} H^9 a_8 - \ldots .$$

$$I = \frac{H}{288}\left\{50\,(y_{-1} + y_{+1}) + 75\,(y_{-2} + y_{+2}) + 19\,(y_{-3} + y_{+3})\right\} - \\ - \frac{1}{4773} H^7 a_6 - \frac{1}{10227} H^9 a_8 - \ldots .$$

et

$$I = \frac{H}{1152}\left\{402\,y_1 + 100\,(y_{-2} + y_{+2}) + 275\,(y_{-3} + y_{+3})\right\} +$$
$$+ \frac{1}{3762}\,H^7 a_6 + \frac{1}{8285}\,H^9 a_8 + \ldots.$$

$$I = \frac{H}{1280}\left\{254\,(y_{-1} + y_{+1}) + 139\,(y_{-2} + y_{+2}) + 247\,(y_{-3} + y_{+3})\right\} +$$
$$+ \frac{1}{6272}\,H^7 a_6 + \frac{1}{12484}\,H^9 a_8 + \ldots$$

§ 37. Les formules de Gauss exigent toujours des calculs très laborieux à cause du grand nombre de décimales dans lesquelles les coefficients B_p et les longueurs des abscisses doivent être exprimés.

On serait peut-être disposé à croire que si les valeurs de r_p sont exprimées seulement par les deux ou trois premières décimales de la table C, ces valeurs donnent encore pour I des formules qui, quoiqu'elles ne soient pas aussi exactes que celles de Gauss, s'en rapprochent toutefois de si près que la différence est de peu d'importance. Ceci cependant n'est nullement le cas.

En effet, nous trouvons, par exemple, pour $m = 4$ et $r_1 = 0{,}09$, $r_2 = 0{,}26$, $r_3 = 0{,}40$ et $r_4 = 0{,}48$ (comparez ces valeurs avec celles de r_p de la table C pour $m = 8$):

$$I = H\{\ 0{,}1775\ 8932\ 5132\ (y_{-1} + y_{+1}) +$$
$$+ 0{,}1607\ 8268\ 3155\ (y_{-2} + y_{+2}) +$$
$$+ 0{,}1119\ 2905\ 5949\ (y_{-3} + y_{+3}) +$$
$$+ 0{,}0496\ 9893\ 5764\ (y_{-4} + y_{+4})\ \}$$

et

corr: $= 0{,}0000\ 0050\ 7392\ H^9 a_8 + \ldots..$

Cette valeur de corr: diffère moins des valeurs des corrections appartenant aux formules des tables A et B pour $n = 8$ que de prime abord on s'y attendrait. On en conclut que les formules de Gauss ne donnent un résultat passablement exact que lorsque les abscisses sont exprimées par un nombre assez grand de décimales. (Voyez aussi l'observation dans le dernier alinéa du § 50). —

Cependant les formules de Gauss peuvent être rendues d'un emploi plus facile de la manière suivante:

Prenons, pour chaque formule en particulier, $(m-1)$ valeurs pour r_p de la table C; exprimons ces valeurs aussi exactement que possible dans un nombre défini, par exemple, de huit décimales; calculons de (29) la valeur la plus favorable pour la valeur de r de l'abscisse restante et rejetons de cette valeur calculée toutes les décimales qui suivent la huitième. Nous avons alors une série de valeurs pour r_p, exprimées par huit décimales, d'où les grandeurs correspondantes I et corr: peuvent être tirées ensuite.

Il est pourtant nécessaire, afin de nous éloigner le moins possible des longueurs des coordonnées de Gauss, de déterminer premièrement la valeur la plus favorable de r_1 quand on donne aux $(m-1)$ grandeurs $r_2, r_3, \ldots r_m$ restantes les valeurs de la table C, aussi exactement que possible, par huit décimales. Puis nous déterminons la valeur la plus favorable de r_2 en donnant aux grandeurs $r_1, r_3, \ldots r_m$ les valeurs de la table C par huit décimales. Etc. jusqu'à ce que nous ayons calculé la valeur la plus favorable de r_m en donnant aux grandeurs $r_1, r_2, \ldots r_{m-1}$ les valeurs de la table C par huit décimales. De cette manière nous obtenons m séries de valeurs r_p et l'on calcule de chacune de ces séries la valeur de corr: qui y appartient. Alors la série cherchée est celle dont la valeur de corr: est la plus petite.

C'est de cette manière que l'on trouve les données de la table E. Une collection de tables semblables, dont la première vaudrait pour 2, la seconde pour 3, la troisième pour 4 décimales, etc. aurait, selon moi, une certaine valeur. —

Comme exemple, nous allons développer la formule pour $n=5$, c'est à dire pour $m=3$ et $r_1=0$. Dans ce cas, les valeurs r_p des abscisses de Gauss sont, suivant la table C:

$r_1=0$, $r_2=0{,}2692\ 3465\ 5053\ldots..$
et $r_3=0{,}4530\ 8992\ 2963\ldots..$

On trouve de (29), puisque $q=m-1$:

$$\frac{1}{2m+1}-\frac{2^2.S_1}{2m-1}+\frac{2^4.S_2}{2m-3}-\ldots(-1)^m.\frac{2^{2m}}{1}S_m=0$$

comme équation unique pour le calcul de la valeur r la plus favorable de l'abscisse qui reste à déterminer dans chaque série en particulier.

L'équation devient pour $m = 3$ et $r_1 = 0$

$$\frac{1}{7} - \frac{4}{5} S_1 + \frac{16}{3} S_2 = o$$

d'où

$$r_2 = \sqrt{\frac{3(5 - 28 r_3^2)}{28(3 - 20 r_3^2)}} \text{ et } r_3 = \sqrt{\frac{3(5 - 28 r_2^2)}{28(3 - 20 r_2^2)}}.$$

En posant maintenant, en relation avec les longueurs des abscisses de Gauss, en premier lieu $r_2 = 0{,}2692\ 3466$, on trouve $r_3 = 0{,}4530\ 8992\ 51\ldots$; ainsi l'on a pour la première série de valeurs r_p:

$$r_1 = 0,\ r_2 = 0{,}2692\ 3466 \text{ et } r_3 = 0{,}4530\ 8993.$$

Cependant en posant $r_3 = 0{,}4530\ 8992$, on trouve $r_2 = 0{,}2692\ 3464\ 80\ldots\ldots$ et l'on a pour la seconde série de valeurs

$$r_1 = 0,\ r_2 = 0{,}2692\ 3465 \text{ et } r_3 = 0{,}4530\ 8992.$$

Pour le premier terme de correction on trouve d'après (32), puisqu'ici $q = m$:

$$\text{corr:} = \left\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 S_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 S_2 - S_3\right\} H^7 a_6.$$

Cette formule donne, pour la première série de valeurs r_p, S_1 étant égal à $r_2^2 + r_3^2$, $S_2 = r_2^2 r_3^2$ et $S_3 = o$:

$$\text{corr:} = 0{,}0000\ 0000\ 0028\ 879\ldots H^7 a_6,$$

et, pour la seconde série,

$$\text{corr:} = 0{,}0000\ 0000\ 0004\ 844\ldots H^7 a_6,$$

d'où résulte que la dernière série de valeurs de r_p, c'est à dire: $r_1 = 0$, $r_2 = 0{,}2692\ 3465$ et $r_3 = 0{,}4530\ 8992$ doit être adoptée comme la plus exacte.

Les valeurs de J et de corr: son calculées ensuite d'après (21), (27) ou (28) et (31) ou (32). —

Pour donner une preuve de l'exactitude de ces formules,

nous allons calculer la valeur approchée, pour $n = 5$ ordonnées, de l'intégrale $\int \frac{d\,x'}{l.(x')}$ entre les limites $x' = 100\,000$ et $x' = 200\,000$ (voyez le § 31). Nous écrivons

$$I = 100\,000\ M \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{d\,x}{5 + log.\ \{\frac{3}{2} + x\}}$$

et

$$y = \frac{1}{5 + log.\ \{\frac{3}{2} + x\}}$$

dans lesquelles $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}2692\ 3465$ et $x_3 = 0{,}4530\ 8992$; ensuite on a

$$I = 100\,000\ M\ \{0{,}2844\ 4443\ 8512\ y_1 + \\ + 0{,}2393\ 1433\ 2532\,(y_{-2} + y_{+2}) + 0{,}1184\ 6344\ 8212\,(y_{-3} + y_{+3})\},$$

M étant égal à 0,4342 9448 19033...

Nous trouvons

$$y_{-3} = \frac{1}{5 + log.\ 1{,}0469\ 1008} = \frac{1}{5{,}0199\ 0938\ 14} = 0{,}1992\ 0678\ 323,$$

$$y_{-2} = \frac{1}{5 + log.\ 1{,}2307\ 6535} = \frac{1}{5{,}0901\ 7526\ 10} = 0{,}1964\ 5688\ 974,$$

$$y_1 = \frac{1}{5 + log.\ 1{,}5} = \frac{1}{5{,}1760\ 9125\ 91} = 0{,}1931\ 9597\ 548,$$

$$y_{+2} = \frac{1}{5 + log.\ 1{,}7692\ 3465} = \frac{1}{5{,}2477\ 8543\ 63} = 0{,}1905\ 5657\ 137,$$

$$y_{+3} = \frac{1}{5 + log.\ 1{,}9530\ 8992} = \frac{1}{5{,}2907\ 2223\ 86} = 0{,}1890\ 1011\ 146;$$

et de ceci

$$I = 8406,\ 243117.$$

Ce résultat est absolument le même que celui que Gauss a trouvé, mais d'une manière moins facile, pour un même nombre d'ordonnées.

CHAPITRE III.

Les longueurs des abscisses exprimées en fonction des coefficients numériques qui se trouvent dans l'expression pour l'aire approximative de la figure.

Soit donné une formule pour l'aire approximative d'une figure, les points de la base de la figure, sur lesquels les ordonnées à mesurer doivent être élevées, étant inconnus; on demande d'indiquer ces points.

§ 38. Pour pouvoir calculer la série d'abscisses que nous avons en vue, nous supposons que la ligne limite AB de la figure, dont l'aire est indiquée par (21), est une courbe parabolique du $2(m-1)^{\text{ième}}$ degré.

Nous divisons la base de la figure par $(2m-1)$ points en $2m$ parties dont les longueurs, de part et d'autre de l'axe Y, sont égales à $\frac{1}{2}B_1 H, \frac{1}{2}B_2 H, \ldots \frac{1}{2}B_m H$, fig. 3 ②; nous élevons, sur le milieu de chacune de ces parties, une ordonnée $y_{\mp p}$ et, sur les extrémités de chaque partie, des perpendiculaires, et nous traçons, par le sommet de chaque ordonnée $y_{\mp p}$, une ligne droite jusqu'aux deux perpendiculaires les plus proches. On obtient ainsi un polygone dont l'aire est exprimée aussi par (21), attendu que la somme des aires des deux trapèzes dont $\frac{1}{2}B_p H$ est la base et dont les ordonnées y_{-p} et y_{+p} sont les hauteurs, est indiquée par le terme $H.B_p\frac{y_{-p}+y_{+p}}{2}$ de (21).

Représentons la distance de l'axe Y élevé au milieu de la base de la figure, à l'ordonnée y_{+p} par $z'_p H$; évidemment cette distance sera à peu près égale à la longueur de l'abscisse $r_p H$, c'est à dire qu'elle donnera approximativement la longueur de cette abscisse.

Ainsi nous avons, comme premières valeurs approximatives des valeurs cherchées que nous indiquons par $r_1, r_2, \ldots r_m$,:

$$\left.\begin{aligned}
z'_1 &= \frac{1}{4}B_1,\\
z'_2 &= \frac{1}{2}B_1+\frac{1}{4}B_2=\frac{1}{2}(B_1+\frac{1}{2}B_2),\\
z'_3 &= \frac{1}{2}B_1+\frac{1}{2}B_2+\frac{1}{4}B_3=\frac{1}{2}(B_1+B_2+\frac{1}{2}B_3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z'_m &= \frac{1}{2}(B_1+B_2+B_3+\ldots+B_{m-1}+\frac{1}{2}B_m).
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Conformément à la supposition sub (26), les valeurs r_1, $r_2, \ldots r_m$ doivent satisfaire aux équations

$$\left.\begin{aligned}
r_1^2B_1+\quad r_2^2B_2+\ldots+\quad r_m^2B_m&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2,\\
r_1^4B_1+\quad r_2^4B_2+\ldots+\quad r_m^4B_m&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
r_1^{2m-2}B_1+r_2^{2m-2}B_2+\ldots+r_m^{2m-2}B_m&=\\
=\frac{1}{2m-1}&\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}.
\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

La correction qui appartient à ces équations est représentée suivant (22) par

$$\text{corr:}=\left\{\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}-(r_1^{2m}B_1+r_2^{2m}B_2+ +\ldots+r_m^{2m}B_m)\right\}H^{2m+1}a_{2m}+\text{etc.}$$

En (49) il se trouve $(m-1)$ équations avec m inconnues, de sorte qu'on peut attribuer, dans certaines limites, une valeur arbitraire à l'une de ces inconnues. Si, par exemple, r_1 est posé égal à z'_1 de (48) alors (49) se change en

$$\left.\begin{aligned}
r_2^2B_2+\quad r_3^2B_3+\ldots+\quad r_m^2B_m&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2-z'^2_1B_1\\
r_2^4B_2+\quad r_3^4B_3+\ldots+\quad r_m^4B_m&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4-z'^4_1B_1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
r_2^{2m-2}B_2+r_3^{2m-2}B_3+\ldots+r_m^{2m-2}B_m&=\\
=\frac{1}{2m-1}&\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}-z'^{2m-2}_1B_1
\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Nous trouvons des valeurs plus approchées de r_p que celles sub (48) en représentant successivement la première des $(m-1)$ équations de (50) par

$$\left.\begin{aligned}
&r_2^2\left\{\frac{r_2^2}{r_2^2}B_2+\frac{r_3^2}{r_2^2}B_3+\ldots+\frac{r_m^2}{r_2^2}B_m\right\}= \\
&\qquad\qquad\qquad =\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2-z_1'^2B_1=\mathfrak{a}_2 \\
&r_3^2\left\{\frac{r_2^2}{r_3^2}B_2+\frac{r_3^2}{r_3^2}B_3+\ldots+\frac{r_m^2}{r_3^2}B_m\right\}=\mathfrak{a}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&r_m^2\left\{\frac{r_2^2}{r_m^2}B_2+\frac{r_3^2}{r_m^2}B_3+\ldots+\frac{r_m^2}{r_m^2}B_m\right\}=\mathfrak{a}_2 \ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

et en substituant dans ces équations pour $\frac{r_3^2}{r_2^2}$, $\frac{r_4^2}{r_2^2}$, etc. les valeurs approximatives qu'on trouve pour ces rapports de (48). Si nous représentons les valeurs approximatives nouvelles de r_p par z''_p, alors nous trouvons

$$\left.\begin{aligned}
&z''^2_2=\frac{\mathfrak{a}_2}{\frac{z'^2_2}{z'^2_2}B_2+\frac{z'^2_3}{z'^2_2}B_3+\ldots+\frac{z'^2_m}{z'^2_2}B_m} \\
&z''^2_3=\frac{\mathfrak{a}_2}{\frac{z'^2_2}{z'^2_3}B_2+\frac{z'^2_3}{z'^2_3}B_3+\ldots+\frac{z'^2_m}{z'^2_3}B_m} \\
&\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

Posons maintenant en (50) $r_p^2=z''^2_p(1+\alpha_p)$, alors ces équations se changent en

$$\left.\begin{aligned}
&z''^2_2(1+\alpha_2)B_2+\ldots+\qquad z''^2_m(1+\alpha_m)B_m= \\
&\qquad\qquad\qquad =\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2-z_1'^2B_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&z''^{2m-2}_2(1+\alpha_2)^{m-1}B_2+\ldots+z''^{2m-2}_m(1+\alpha_m)^{m-1}B_m= \\
&\qquad\qquad\qquad =\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}-z_1^{2m-2}B_1.
\end{aligned}\right\}\quad(53)$$

dans lesquelles z''^2_p et B_p sont connues, mais les valeurs de α_p, qui sont très petites en comparaison de l'unité, doivent encore être calculées.

Nous trouvons facilement des valeurs approximatives de α_p, en supprimant en (53), après développement, les degrés de α_p. De cette manière nous obtenons $(m-1)$ équations, dans lesquelles les $(m-1)$ inconnues α_p ne se présentent qu'au premier degré, de sorte qu'elles en peuvent être résolues facilement. Au besoin en substituant de nouveau en (53) les produits que nous trouvons pour $z''^{2q}_p(1+\alpha)^q B_p = z'''^{2q}_p B_p$ au lieu de $z''^{2q}_p B_p$, nous obtenons de nouvelles équations pour α_p qui nous mettent en état de nous rapprocher davantage encore des valeurs cherchées. Ainsi par une approximation répétée, nous trouvons pour r_p, des valeurs aussi exactes que nous le désirons.

§ 39. En guise d'application, nous nous proposons de calculer les valeurs r_p qui appartiennent à une équation numérique, c'est à dire à une équation dont les coefficients B_p sont des nombres donnés. Par exemple,

$$I = H\left\{0{,}36\,\frac{y_{-1}+y_{+1}}{2} + 0{,}32\,\frac{y_{-2}+y_{+2}}{2} + 0{,}22\,\frac{y_{-3}+y_{+3}}{2} + \right.$$
$$\left. + \,0{,}10\,\frac{y_{-4}+y_{+4}}{2}\right\} \ldots (54)$$

Nous trouvons d'après (48):

$$z'_1 = \frac{1}{4}\,.\,0{,}36 = 0{,}09, \qquad \text{ainsi}$$

$$z'_2 = \frac{1}{2}\,.\,(0{,}36+0{,}16) = \frac{1}{2}\,.\,0{,}52, \quad \text{»} \quad \frac{z'^2_3}{z'^2_2} = \left(\frac{79}{52}\right)^2 \text{ et } \frac{z'^2_4}{z'^2_2} = \left(\frac{95}{52}\right)^2;$$

$$z'_3 = \frac{1}{2}\,.\,0{,}79, \quad \text{»} \quad \frac{z'^2_2}{z'^2_3} = \left(\frac{52}{79}\right)^2 \text{ » } \frac{z'^2_4}{z'^2_3} = \left(\frac{95}{79}\right)^2;$$

$$z'_4 = \frac{1}{2}\,.\,0{,}95, \quad \text{»} \quad \frac{z'^2_2}{z'^2_4} = \left(\frac{52}{95}\right)^2 \text{ » } \frac{z'^2_3}{z'^2_4} = \left(\frac{79}{95}\right)^2;$$

d'après (51) et (52): $a_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - z'^2_1 B_1 =$

$$= \frac{1}{12} - 0{,}0081\,.\,0{,}32 = 0{,}0804\,17,$$

$$z''^2_2 = \frac{0,0804\,17}{0,32+\left(\frac{79}{52}\right)^2 . 0,22+\left(\frac{95}{52}\right)^2 . 0,10} = 0,0692\,33 \text{ et } z''_2 = 0,26312,$$

$$z''^2_3 = \frac{0,0804\,17}{\left(\frac{52}{79}\right)^2 .0,32+ 0,22+ \left(\frac{95}{79}\right)^2 .0,10} = 0,1597\,94 \text{ et } z''_3 = 0,39975,$$

$$z''^2_4 = \frac{0,0804\,17}{\left(\frac{52}{95}\right)^2 .0,32+\left(\frac{79}{95}\right)^2 .0,22+ 0,10} = 0,2310\,75 \text{ et } z''_4 = 0,48070,$$

ensuite d'après (53), en supprimant les degrés de α_p,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{c_3 - (z''^2_3 + z''^2_4)\, c_2 + z''^2_3\, z''^2_4\, c_1}{B_2\, z''^2_2\, (z''^2_2 - z''^2_3)\, (z''^2_2 - z''^2_4)} \\ \alpha_3 &= \frac{c_3 - (z''^2_2 + z''^2_4)\, c_2 + z''^2_2\, z''^2_4\, c_1}{B_3\, z''^2_3\, (z''^2_3 - z''^2_2)\, (z''^2_3 - z''^2_4)} \\ \alpha_4 &= \frac{c_3 - (z''^2_2 + z''^2_3)\, c_2 + z''^2_2\, z''^2_3\, c_1}{B_4\, z''^2_4\, (z''^2_4 - z''^2_2)\, (z''^2_4 - z''^2_3)} \end{aligned}\right\} (55)$$

où

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[z'^2_1\, B_1 + z''^2_2\, B_2 + z''^2_3\, B_3 + z''^2_4\, B_4\right] \\ c_2 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[z'^4_1\, B_1 + z''^4_2\, B_2 + z''^4_3\, B_3 + z''^4_4\, B_4\right]\right\} \\ c_3 &= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left[z'^6_1\, B_1 + z''^6_2\, B_2 + z''^6_3\, B_3 + z''^6_4\, B_4\right]\right\} \end{aligned}\right\} (56)$$

En substituant les valeurs de z'^2_1, z''^2_2, z''^2_3 et z''^2_4 en (56) on trouve:

$c_1 = 0{,}000\,014\,041\,29$, $c_2 = -\,0{,}000\,004\,858\,187$ et $c_3 = -\,0{,}000\,001\,441\,718$;

ensuite d'après (55)

$\alpha_2 = 0{,}003\,004\,72$, $\alpha_3 = -\,0{,}001\,065\,05$ et $\alpha_4 = -\,0{,}000\,653\,06$;

puis

$$B_2\, z''^2_2\, (1 + \alpha_2) = B_2\, z'''^2_2 = 0{,}022\,219\,467,$$
$$B_3\, z''^2_3\, (1 + \alpha_3) = B_3\, z'''^2_3 = 0{,}035\,111\,098,$$

etc. et après cela d'après (56) pour les nouvelles valeurs de c_p:

$$c_1 = 0{,}000\;000\;000\;23,$$
$$c_2 = -\,0{,}000\;000\;009\;00,$$
$$c_3 = -\,0{,}000\;000\;002\;51,$$

ce qui prouve que les racines carrées de z'''^2_p, notamment

$$r_1 = 0{,}09\,,$$
$$r_2 = 0{,}2635\ 068\,,$$
$$r_3 = 0{,}3994\ 945 \text{ et}$$
$$r_4 = 0{,}4804\ 869\,,$$

donnent assez exactement les longueurs d'une série de valeurs de r_p qui satisfont à la question. Si l'on désirait une exactitude encore plus grande, on n'aurait besoin pour l'obtenir que de substituer les valeurs trouvées de z'''^2_p et celles de c_p en (55) et d'en résoudre x_2, x_3 et x_4. On trouve ainsi pour x_p des valeurs qui sont très petites en comparaison de celles qu'on a trouvées la première fois, de sorte qu'on peut alors exprimer r_p exact à un nombre plus grand de décimales. Etc.

Les calculs dans ce paragraphe-ci et dans les §§ suivants, admettent beaucoup de simplifications, ainsi p. e. les dénominateurs des fractions sub (55), une fois calculés, pourront, au cas d'une approximation continuée, être mis en compte comme des grandeurs constantes.

§ 40. Posons — pour une seconde application — que les abscisses doivent être déterminées, quand on a en (21) $B_1 = B_2 = \ldots = B_m$, ainsi

$$I = H.\frac{1}{m}\left\{\frac{y_{-1}+y_{+1}}{2} + \frac{y_{-2}+y_{+2}}{2} + \ldots + \frac{y_{-m}+y_{+m}}{2}\right\} \quad ..(57)$$

On a alors pour $m = 4$ les calculs suivants:
Il résulte de (48)

$$z'_1 = \frac{1}{16} = 0{,}0625,$$
$$z'_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16} = 0{,}1875,$$
$$z'_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{16} = 0{,}3125 \text{ et}$$
$$z'_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{16} = 0{,}4375.$$

Puis, en appliquant la méthode développée dans le § 38, on trouve

$$r_1 = 0{,}0625, \qquad r_2 = 0{,}1979\ 9177,$$
$$r_3 = 0{,}2980\ 6756, \quad r_4 = 0{,}4487\ 5614,$$

$$I = H \cdot \frac{1}{8}\left\{(y_{-1}+y_{+1})+(y_{-2}+y_{+2})+(y_{-3}+y_{+3})+(y_{-4}+y_{+4})\right\}$$

et

$$\text{corr:} = 0{,}0000\ 0533\ H^9 a_8.$$

Calcul des longueurs d'une série d'abscisses appartenant à une expression donnée de l'aire approchée d'une figure arbitraire, de telle manière que le premier terme de correction soit un minimum.

§ 41. Les valeurs de r_p trouvées dans les deux §§ précédents, satisfont bien à la question posée, mais elles ne donnent pas le résultat le plus avantageux; les longueurs des abscisses qui exigent une correction aussi petite que possible pour la valeur donnée de I, peuvent être calculées de la manière suivante.

Si en (26) on prend des valeurs déterminées pour B_p, ainsi que

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_m = 1,$$

il ne reste que $(m-1)$ équations auxquelles les m valeurs inconnues de r_p^2 doivent satisfaire. Par conséquent on peut encore poser la condition qu'un des termes de correction, dont la valeur du coefficient δ_{2m+2t} est représentée en (23), doit avoir une certaine valeur; par exemple, une valeur minimum.

En posant premièrement qu'en (23) δ_{2m}, qui est le coefficient du terme de correction $\delta_{2m} H^{2m+1} a_{2m}$ de (22), doit avoir une valeur minimum, les $2m$ abscisses doivent satisfaire aux m conditions suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}
r_1^2 B_1 + \quad r_2^2 B_2 + \ldots + \quad r_m^2 B_m = \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2, \\
r_1^4 B_1 + \quad r_2^4 B_2 + \ldots + \quad r_m^4 B_m = \mathfrak{a}_4 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_1^{2m-2} B_1 + r_2^{2m-2} B_2 + \ldots + r_m^{2m-2} B_m = \mathfrak{a}_{2m-2} = \\
\qquad = \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}, \\
r_1^{2m} B_1 + \quad r_2^{2m} B_2 + \ldots + \quad r_m^{2m} B_m = \mathfrak{a}_{2m} - \delta_{2m} = \\
\qquad = \frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - \delta_{2m};
\end{array}\right\} (58)$$

où δ_{2m} représente un minimum.

Il arrivera quelquefois que δ_{2m} peut être posé égal à zéro. Dans ce cas (58) se change en:

$$\left.\begin{array}{l}
r_1^2 B_1 + \quad r_2^2 B_2 + \ldots + \quad r_m^2 B_m = \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2, \\
r_1^4 B_1 + \quad r_2^4 B_2 + \ldots + \quad r_m^4 B_m = \mathfrak{a}_4 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_1^{2m-2} B_1 + r_2^{2m-2} B_2 + \ldots + r_m^{2m-2} B_m = \mathfrak{a}_{2m-2} = \\
\qquad = \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}, \\
r_1^{2m} B_1 + \quad r_2^{2m} B_2 + \ldots + \quad r_m^{2m} B_m = \mathfrak{a}_{2m} \quad = \\
\qquad = \frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}.
\end{array}\right\} (59)$$

Quand on a calculé les m valeurs approchées $z''^2_1, z''^2_2, \ldots z''^2_m$ {voyez la formule (52)} et l'on remplace en (59) $r_p^2 B_p$ par $z''^2_p (1 + \alpha_p) B_p$, on trouve, après avoir supprimé les degrés de α_p, les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}
z''^2_1 \ \alpha_1 B_1 + z''^2_2 \ \alpha_2 B_2 + \ldots + z''^2_m \ \alpha_m B_m = c_1, \\
z''^4_1 \ \alpha_1 B_1 + z''^4_2 \ \alpha_2 B_2 + \ldots + z''^4_m \ \alpha_m B_m = c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z''^{2m}_1 \alpha_1 B_1 + z''^{2m}_2 \alpha_2 B_2 + \ldots + z''^{2m}_m \alpha_m B_m = c_m;
\end{array}\right\} (60)$$

dans lesquelles

$$c_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[z''^2_1 B_1 + z''^2_2 B_2 + \ldots + z''^2_m B_m\right],$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[z''^4_1 B_1 + z''^4_2 B_2 + \ldots + z''^4_m B_m\right]\right\},$$

. . . .

$$c_m = \frac{1}{m}\left\{\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - \left[z''^{2m}_1 B_1 + z''^{2m}_2 B_2 + \ldots + z''^{2m}_m B_m\right]\right\}.$$

On trouve de (60), en représentant la somme des produits q à q des grandeurs $z''^2_1, z''^2_2, \ldots z''^2_m$, sauf la grandeur z''^2_p elle-même, par Σ_q:

$$\alpha_p = \frac{c_m - c_{m-1}\,\Sigma_1 + c_{m-2}\,\Sigma_2 - \ldots (-1)^{m-1} c_1\,\Sigma_{m-1}}{B_p\, z''^2_p (z''^2_p - z''^2_1)(z''^2_p - z''^2_2)\ldots(z''^2_p - z''^2_{p-1})(z''^2_p - z''^2_{p+1})\ldots(z''^2_p - z''^2_m)} \quad (61)$$

§ 42. Pour $m = 4$, par exemple, nous trouvons d'après (61) les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{c_4 - c_3(z''^2_2 + z''^2_3 + z''^2_4) + c_2(z''^2_2 z''^2_3 + z''^2_2 z''^2_4 + z''^2_3 z''^2_4) - c_1 z''^2_2 z''^2_3 z''^2_4}{B_1 z''^2_1 (z''^2_1 - z''^2_2)(z''^2_1 - z''^2_3)(z''^2_1 - z''^2_4)} \\
\alpha_2 &= \frac{c_4 - c_3(z''^2_1 + z''^2_3 + z''^2_4) + c_2(z''^2_1 z''^2_3 + z''^2_1 z''^2_4 + z''^2_3 z''^2_4) - c_1 z''^2_1 z''^2_3 z''^2_4}{B_2 z''^2_2 (z''^2_2 - z''^2_1)(z''^2_2 - z''^2_3)(z''^2_2 - z''^2_4)} \\
\alpha_3 &= \frac{c_4 - c_3(z''^2_1 + z''^2_2 + z''^2_4) + c_2(z''^2_1 z''^2_2 + z''^2_1 z''^2_4 + z''^2_2 z''^2_4) - c_1 z''^2_1 z''^2_2 z''^2_4}{B_3 z''^2_3 (z''^2_3 - z''^2_1)(z''^2_3 - z''^2_2)(z''^2_3 - z''^2_4)} \\
\alpha_4 &= \frac{c_4 - c_3(z''^2_1 + z''^2_2 + z''^2_3) + c_2(z''^2_1 z''^2_2 + z''^2_1 z''^2_3 + z''^2_2 z''^2_3) - c_1 z''^2_1 z''^2_2 z''^2_3}{B_4 z''^2_4 (z''^2_4 - z''^2_1)(z''^2_4 - z''^2_2)(z''^2_4 - z''^2_3)}
\end{aligned}\right\} (62)$$

dans lesquelles

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[z''^2_1 B_1 + z''^2_2 B_2 + z''^2_3 B_3 + z''^2_4 B_4\right], \\
c_2 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[z''^4_1 B_1 + z''^4_2 B_2 + z''^4_3 B_3 + z''^4_4 B_4\right]\right\}, \\
c_3 &= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left[z''^6_1 B_1 + z''^6_2 B_2 + z''^6_3 B_3 + z''^6_4 B_4\right]\right\} \text{et} \\
c_4 &= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^8 - \left[z''^8_1 B_1 + z''^8_2 B_2 + z''^8_3 B_3 + z''^8_4 B_4\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (63)$$

Par une application répétée de ces formules, nous trouvons pour les valeurs de r_p qui appartiennent à l'expression sub (54):

$$r_1 = 0{,}090\ 421\ 971\ 45, \quad r_2 = 0{,}263\ 131\ 424\ 28,$$
$$r_3 = 0{,}399\ 824\ 515\ 72 \text{ et } r_4 = 0{,}480\ 256\ 151\ 21,$$

étant exactes à 10 décimales près.

Pour la correction, on trouve, d'après (22) en relation avec (59)

$$\text{corr:} = \left\{\frac{1}{2m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} - (r_1^{2m+2}B_1 + r_2^{2m+2}B_2 + \right.$$
$$\left. + \ldots + r_m^{2m+2}B_m)\right\} H^{2m+3} a_{2m+2} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{2m+5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4} - (r_1^{2m+4}B_1 + r_2^{2m+4}B_2 + \right.$$
$$\left. + \ldots + r_m^{2m+4}B_m)\right\} H^{2m+5} a_{2m+4} + \text{etc.}$$

ou

$$\text{corr:} = \left\{\frac{1}{2m+3} - \frac{2^2 S_1}{2m+1} + \frac{2^4 S_2}{2m-1} - \right.$$
$$\left. - \ldots (-1)^m \frac{2^{2m} S_m}{3}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} H^{2m+3} a_{2m+2} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{2m+5} - \frac{2^2 S_1}{2m+3} + \frac{2^4 S_2}{2m+1} - \ldots (-1)^m \frac{2^{2m} S_m}{5} + \right.$$
$$\left. + 2^{2m+4} \delta_{2m+2} S_1\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4} H^{2m+5} a_{2m+4} + \text{etc.}$$

D'après chacune de ces deux expressions on trouve, pour $m = 4$,

$$\text{corr:} = 0{,}000\ 000\ 014\ 59\ H^{11} a_{10} + \text{etc.} \ldots (64)$$

§ 43. Dans le 3ième alinéa du § 37, on a traité une formule dont les valeurs des coefficients B_p ont été calculées dans la snpposition que les valeurs de r_p sont égales à celles de Gauss, lorsque dans celles-ci on supprime toutes les décimales à l'exception des deux premières. On a vu que cette formule n'est pas beaucoup plus exacte qu'une des formules des tables A et B pour la même valeur de m.

Les valeurs de r_p trouvées dans le § précédent, correspondent avec la même formule de Gauss, quand la valeur de $\frac{1}{2}B_p$ y est exprimée dans les deux premières décimales seu-

lement. La valeur du premier terme de correction sub (64) fait voir que les valeurs de r_p du § précédent donnent une exactitude sensiblement plus grande que celles des tables A et B pour $n = 8$. Mais aussi on doit faire observer ici que le grand nombre de décimales au moyen desquelles r_p doit être exprimé, ne rend pas, avec l'application d'une telle formule, la perte de temps beaucoup moindre, que quand on se sert de la formule primitive de Gauss pour un nombre égal d'ordonnées.

§ 44. En attendant il n'est pas toujours possible de placer les ordonnées de telle manière qu'il soit satisfait à la dernière condition de (59); ce sera le cas e. a. avec l'expression sub (57) pour $m = 4$.

Si l'on suppose, par exemple, qu'alors les valeurs de r_p, trouvées dans le § 40 sont connues, c'est à dire

$$r_1 = 0{,}0625 \qquad r_2 = 0{,}1979\ 9177,$$
$$r_3 = 0{,}2980\ 6756 \text{ et } r_4 = 0{,}4487\ 5614,$$

on a en (62) et (63) $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ et $c_3 = 0$, par conséquent

$$\alpha_1 = \frac{c_4}{B_1 z''^2_1 (z''^2_1 - z''^2_2)(z''^2_1 - z''^2_3)(z''^2_1 - z''^2_4)} = -\frac{16724}{8325} =$$

$= -2{,}01$, d'où il résulte que si l'on prend en (57) $m = 4$, il ne peut pas être satisfait à la dernière condition sub (59). Evidemment, dans ce cas-ci, la valeur $r_1 = 0$ conduit à la position la plus avantageuse des ordonnées.

Ceci peut être encore démontré de la manière suivante:

Si l'on prend successivement $r_1 = 0{,}062\ 9956$, $r_1 = 0{,}0625$, $r_1 = 0{,}05$ et $r_1 = 0$ et si l'on calcule, suivant la méthode que nous venons de développer, les valeurs de r_2, r_3, r_4 et corr: qui appartiennent à chacune de ces valeurs de r_1 en particulier, on trouve les quatre séries de valeurs suivantes:

pour $r_1 = 0{,}062\ 9956$: $r_2 = 0{,}197\ 6650$, $r_3 = 0{,}298\ 1972$,
$r_4 = 0{,}448\ 7448$ et
corr: $= 0{,}000\ 006\ 726\ H^9 a_8$;

pour $r_1 = 0{,}0625$: $r_2 = 0{,}197\ 9918$, $r_3 = 0{,}298\ 0676$,
$r_4 = 0{,}448\ 7561$ et
corr: $= 0{,}000\ 006\ 690\ H^9 a_8$;

pour $r_1 = 0{,}05$: $r_2 = 0{,}205\ 715$, $r_3 = 0{,}294\ 768$,
$r_4 = 0{,}449\ 029$ et
corr: $= 0{,}000\ 005\ 803\ H^9 a_8$, et

pour $r_1 = 0$: $r_2 = 0{,}221\ 877$, $r_3 = 0{,}286\ 309$,
$r_4 = 0{,}449\ 590$ et
corr: $= 0{,}000\ 003\ 950\ H^9 a_8$.

Les différentes valeurs de corr: montrent que la correction diminue à mesure que r_1 s'approche davantage de zéro; et qu'elle est la plus petite quand $r_1 = 0$. Vu que r_1 ne peut pas être pris plus petit que zéro, il se trouve confirmé aussi de cette manière que, dans le cas de $m = 4$, il n'est pas possible de satisfaire à la dernière condition de (59).

Il résulte tout à la fois des calculs de ce paragraphe-ci et de ceux des §§ précédents, qu'avec chaque expression sub (21) il y a un nombre illimité de séries d'abscisses qui satisfont à la question posée au début de ce chapitre; encore que nous puissions, dans de certaines limites, faire coïncider une des ordonnées de milieu avec un point déterminé arbitrairement, ou les ordonnées extrêmes avec les points extrêmes de la base de la figure, ou les deux ordonnées médianes avec l'axe Y — c'est à dire pourvu que, dans chacun de ces cas, il soit satisfait aux conditions $x_1 \geqq 0$, $x_p \geqq x_{p-1}$ et $x_m \leqq \frac{1}{2}$ qui découlent de la nature du problème.

L'aire approximative d'une figure exprimée par le produit de la base et la moyenne des ordonnées à mesurer.

§ 45. Le calcul des valeurs de B_p, par approximation de r_p, exposé dans les §§ précédents est toujours très laborieux, si les valeurs des r_p doivent être exprimées exactement à un grand nombre de décimales près. Mais si l'on prend en (49), en (58) ou en (59) $B_1 = B_2 = \ldots = B_m = \frac{1}{m}$, une solution

directe est très facile et donne lieu à des formules assez simples.

Dans l'hypothèse de $B_p = \frac{1}{m}$ les équations sub (49) se changent en

$$\left.\begin{array}{l} r_1^2 + \quad r_2^2 + \ldots + \quad r_m^2 = \quad \frac{m}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ r_1^4 + \quad r_2^4 + \ldots + \quad r_m^4 = \quad \frac{m}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_1^{2m-2} + r_2^{2m-2} + \ldots + r_m^{2m-2} = \frac{m}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}, \end{array}\right\} (65)$$

et on a, suivant (22),

$$\begin{aligned} \text{corr:} = & \left\{\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - \frac{1}{m}(r_1^{2m} + r_2^{2m} + \right. \\ & \left. + \ldots + r_m^{2m})\right\} H^{2m+1} a_{2m} + \\ & + \left\{\frac{1}{2m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} - \frac{1}{m}(r_1^{2m+2} + r_2^{2m+2} + \right. \\ & \left. + \ldots + r_m^{2m+2})\right\} H^{2m+3} a_{2m+2} + \text{ etc.} \quad (66) \end{aligned}$$

ou, en relation avec (23) et (25),

$$\begin{aligned} \text{corr:} = & \left\{\frac{1}{2m+1} - \frac{2^2 S_1}{2m-1} + \frac{2^4 S_2}{2m-3} - \right. \\ & \left. - \ldots (-1)^m \frac{2^{2m} S_m}{1}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} H^{2m+1} a_{2m} + \\ & + \left\{\frac{1}{2m+3} - \frac{2^2 S_1}{2m+1} + \frac{2^4 S_2}{2m-1} - \ldots (-1)^m \frac{2^{2m} S_m}{3} + \right. \\ & \left. + 2^{2m+2} \delta_{2m} S_1\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} H^{2m+3} a_{2m+2} + \text{ etc.} \quad (67) \end{aligned}$$

En (65) il y a $(m-1)$ équations avec m inconnues r_p^2. On peut, par conséquent, dans certaines limites, donner à une de ces inconnues une valeur arbitraire, de sorte qu'il ne reste qu'autant d'inconnues qu'il y a d'équations.

Attribuons à r_1 une valeur déterminée, représentons la valeur de la somme des $q^{ièmes}$ degrés des inconnues r_2^2, r_3^2, $\dots r_m^2$ par a_{2q}, nous pouvons alors écrire au lieu de (65)

$$\left.\begin{aligned} r_2^2+r_3^2+\dots+r_m^2&=\frac{m}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2-r_1^2=a_2,\\ r_2^4+r_3^4+\dots+r_m^4&=\frac{m}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4-r_1^4=a_4,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ r_2^{2m-2}+r_3^{2m-2}+\dots+r_m^{2m-2}&=\\ =\frac{m}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}&-r_1^{2m-2}=a_{2m-2}; \end{aligned}\right\} (68)$$

représentons encore la somme des produits q à q [voyez sub (24)] par S_q, il apparaîtra alors que les valeurs de r_p^2 de (68) sont les racines de l'équation

$$r^{2m-2}-S_1 r^{2m-4}+S_2 r^{2m-6}-\dots(-1)^{m-1}S_{m-1}=o,$$

dans laquelle

$$p\,S_p=S_{p-1}a_2-S_{p-2}a_4+\dots(-1)^{p-1}a_{2p}.$$

On trouve, si l'on prend, par exemple, la valeur de r_1 égale à celle de la plus petite abscisse selon MacLaurin notamment $r_1=\frac{1}{4m}$, pour $m=4$:

$$r_2^2+r_3^2+r_4^2=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{16}\right)^2=a_2=S_1,$$

$$r_2^4+r_3^4+r_4^4=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{16}\right)^4=a_4 \text{ et}$$

$$r_2^6+r_3^6+r_4^6=\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{16}\right)^6=a_6;$$

ainsi

$$a_2=S_1=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{16}\right)^2=\frac{253}{768},$$

$$S_2=\frac{1}{2}\left\{S_1a_2-a_4\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{253}{768}\right)^2-\left[\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{16}\right)^4\right]=\frac{86317}{294\,9120}\right. \text{ et}$$

$$S_3=\frac{1}{3}\left\{S_2a_2-S_1a_4+a_6\right\}=\frac{1}{3}\left\{\frac{86317}{294\,9120}\cdot\frac{253}{768}-\frac{253}{768}\cdot\frac{16379}{3276\,80}+\right.$$
$$\left.+\frac{1048569}{11744\,0512}\right\}=\frac{3335\,9341}{475\,6340\,7360},$$

de sorte qu'on a

$$475\ 6340\ 7360\ (r^2)^3 - 156\ 6867\ 4560\ (r^2)^2 + \\ + 139212\ 0576\ (r^2) - 3335\ 9341 = 0$$

d'où, en y ajoutant la valeur adoptée pour r_1:

$$r_1 = 0{,}0625\ 0000, \quad r_2 = 0{,}1979\ 9177, \\ r_3 = 0{,}2980\ 6756 \text{ et } r_4 = 0{,}4487\ 5614;$$

puis on a pour I:

$$I = H\frac{1}{8}\left\{(y_{-1}+y_{+1})+(y_{-2}+y_{+2})+(y_{-3}+y_{+3})+(y_{-4}+y_{+4})\right\}$$

et pour le premier terme de correction d'après (66) ou (67),

$$\text{corr:} = \frac{1}{187\ 696} H^9 a_8 = 0{,}000\ 005\ 33\ H^9 a_8.$$

On obtient ainsi pour I une expression plus exacte et qui, dans certaines circonstances, peut être aussi facile ou plus facile à appliquer qu'une des deux expressions pour I des tables A et B pour un même nombre d'ordonnées à mesurer.

Quand on prend pour $m = 5$ la valeur de r_1 égale à celle de la plus petite abscisse selon MacLaurin, on trouve

$$r_1 = 0{,}0500\ 0000, \ r_2 = 0{,}1366\ 9876, \\ r_3 = 0{,}2766\ 0481, \ r_4 = 0{,}3277\ 6209 \text{ et} \\ r_5 = 0{,}4599\ 3685,$$

$$I = H.\frac{1}{10}\left\{(y_{-1}+y_{+1}) + (y_{-2}+y_{+2}) + (y_{-3}+y_{+3}) + \right. \\ \left. + (y_{-4}+y_{+4}) + (y_{-5}+y_{+5})\right\}$$

et

$$\text{corr:} = \frac{1}{133\ 1200} H^{11} a_{10} = 0{,}000\ 000\ 75\ H^{11} a_{10}.$$

Formules d'approximation d'après **Hermite-Tchebichef.**

§ 46. Dans chacune des formules pour I d'après Hermite-Tchebichef tous les coefficients B_p sub (21) ont une même valeur (c'est à dire, dans chacune de ces formules toutes les ordonnées à mesurer sont équivalentes), tandis que le premier terme de correction qui appartient à la formule est égale à zéro.

Dans ce cas, nous avons d'après (23) et (26) pour un nombre pair d'ordonnées à mesurer: $B_p = \frac{1}{m}$ et

$$\left.\begin{array}{l} r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_m^2 = \frac{m}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = a_2, \\ r_1^4 + r_2^4 + \ldots + r_m^4 = \frac{m}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = a_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1^{2m-2} + r_2^{2m-2} + \ldots + r_m^{2m-2} = \frac{m}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = a_{2m-2}, \\ r_1^{2m} + r_2^{2m} + \ldots + r_m^{2m} = \frac{m}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = a_{2m}, \end{array}\right\} \quad (69)$$

et les valeurs de r_p sont les racines de l'équation

$$r^{2m} - S_1\, r^{2m-2} + S_2\, r^{2m-4} - \ldots (-1)^m S_m = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

dans laquelle

$$p\, S_p = S_{p-1}\, a_2 - S_{p-2}\, a_4 + \ldots (-1)^{p-1}\, a_{2p}.$$

Le premier terme de correction est représenté par

$$\text{corr:} = \left\{\frac{1}{2m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} - \frac{1}{m}\left(r_1^{2m+2} + r_2^{2m+2} + \ldots + r_m^{2m+2}\right)\right\} H^{2m+3}\, a_{2m+2}$$

ou

$$\text{corr:} = \left\{\frac{1}{2m+3} - \frac{2^2 S_1}{2m+1} + \frac{2^4 S_2}{2m-1} - \ldots (-1)^m \frac{2^{2m} S_m}{3}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} H^{2m+3}\, a_{2m+2}.$$

Pour $m = 3$, par exemple, on a

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \frac{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = a_2 = S_1$$

$$r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{80} = a_4 \text{ et}$$

$$r_1^6 + r_2^6 + r_3^6 = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{448} = a_6 \text{; ainsi}$$

$$S_1 = \frac{1}{4} \qquad \text{ou } S_1 = \frac{1}{4},$$

$$2\, S_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{80} = \frac{2}{80} \qquad \text{» } S_2 = \frac{1}{80} \text{ et}$$

$$3\, S_3 = \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{80} + \frac{3}{448} = \frac{1}{2240} \qquad \text{» } S_3 = \frac{1}{6720},$$

par conséquent

$$(r^2)^3 - \frac{1}{4}(r^2)^2 + \frac{1}{80}(r^2) - \frac{1}{6720} = 0.$$

On trouve pour

$m = 1$: $3(4r^2) - 1 = 0$,
$m = 2$: $45(4r^2)^2 - 30(4r^2) + 1 = 0$ et
$m = 3$: $105(4r^2)^3 - 105(4r^2)^2 + 21(4r^2) - 1 = 0$.

Les valeurs de r_p résultant de ces équations, sont recueillies dans la table F ainsi que les premiers termes de correction qui y appartiennent.

Pour $m = 4$ et $m = 5$ les racines de l'équation sub (70) sont en partie imaginaires, d'où il résulte que pour $m = 4$ et $m = 5$, sous les conditions posées sub (69), les coefficients B_p ne peuvent pas être égaux entre eux.

§ 47. Pour un nombre impair d'ordonnées à mesurer (21) se change en

$$I = H\left\{B_1 y_1 + \frac{1}{2}B_2(y_{-2} + y_{+2}) + \ldots + \frac{1}{2}B_m(y_{-m} + y_{+m})\right\}$$

ainsi $B_1 = \frac{1}{2}B_2$ et, d'après la première équation de (26),

$$B_1 + (m-1)B_2 = \frac{1}{2}B_2 + (m-1)B_2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)B_2 = 1,$$

d'où

$$B_2 = B_3 = \ldots = B_m = \frac{2}{2m-1} \text{ et } B_1 = \frac{1}{2m-1},$$

par conséquent d'après (26)

$$r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_m^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2m-1}{2} = a_2 = S_1,$$

$$r_2^4 + r_3^4 + \ldots + r_m^4 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{2m-1}{2} = a_4,$$

. . . .

$$r_2^{2m-2} + r_3^{2m-2} + \ldots + r_m^{2m-2} =$$
$$= \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} \cdot \frac{2m-1}{2} = a_{2m-2};$$

les inconnues sont les racines de l'équation

$$r^{2m-2}-S_1 r^{2m-4}+S_2 r^{2m-6}-\ldots(-1)^{m-1}S_{m-1}=o$$

dans laquelle

$$p\,S_p=S_{p-1}\,\mathrm{a}_2-S_{p-2}\,\mathrm{a}_4+\ldots(-1)^{p-1}\,\mathrm{a}_p.$$

On trouve d'après (22) en relation avec (23) et (25) que le premier terme de correction est exprimé par

$$\text{corr:}=\left\{\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}-\frac{2}{2m-1}\left[r_2^{\,2m}+r_3^{\,2m}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ldots+r_m^{\,2m}\right]\right\}H^{2m+1}a_{2m},$$

ou

$$\text{corr:}=\left\{\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}-\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}S_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4}S_2-\ldots(-1)^{m-1}\frac{1}{3}S_{m-1}\right\}H^{2m+1}\,a_{2m}.$$

Pour $m=4$, par exemple, on trouve

$$r_2^{\,2}+r_3^{\,2}+r_4^{\,2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{24}=\mathrm{a}_2=S_1,$$

$$r_2^{\,4}+r_3^{\,4}+r_4^{\,4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{160}=\mathrm{a}_4,$$

$$r_2^{\,6}+r_3^{\,6}+r_4^{\,6}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{7}{2}=\frac{1}{128}=\mathrm{a}_6 \text{ et}$$

$$S_1=\frac{7}{24},$$

$$2\,S_2=\frac{7}{24}\cdot\frac{7}{24}-\frac{7}{160}=\frac{119}{2880}, \text{ ainsi } S_2=\frac{119}{5760},$$

$$3\,S_3=\frac{119}{5760}\cdot\frac{7}{24}-\frac{7}{24}\cdot\frac{7}{160}+\frac{1}{128}=\frac{149}{13\;8240}, \text{ ainsi}$$

$$S_3=\frac{149}{41\;4720},$$

par conséquent

$$r^6-\frac{7}{24}r^4+\frac{119}{5760}r^2-\frac{149}{41\;4720}=0. \text{ Etc.}$$

On trouve pour

$n=3$: $2(4r^2)-1=0$,

$n=5$: $72(4r^2)^2-60(4r^2)+7=0$,

$n=7$: $6480(4r^2)^3-7560(4r^2)^2+2142(4r^2)-149=0$ et

$n=9$: $22400(4r^2)^4-33600(4r^2)^3+15120(4r^2)^2-$

$-2280(4r^2)+53=0$.

Aussi les valeurs de r_p résultant de ces équations sont recueillies dans la table *F*.

§ 48. Surtout si la courbe *AB* n'est pas donnée par une équation $y=f(x)$, mais si elle est donnée seulement en dessin, par exemple, ou tracée au hasard, et si l'on veut calculer l'aire *I* limitée par cette courbe, l'application des formules de la table *F* sera préférable alors à celle des formules des tables *A* et *B*; non seulement parce que, pour un même nombre d'ordonnées à mesurer, la valeur de corr: des formules de la table *F* est plus petite que celle des formules des tables *A* et *B*, mais principalement parce que le calcul de *I* selon les formules de la table *F* est beaucoup plus facile. En effet, après avoir indiqué sur l'axe *X* les extrémités des abscisses et avoir mesuré les ordonnées, le calcul de l'aire approximative *I* selon la table *F* se borne à prendre le produit de la moyenne de ces ordonnées et la base de la figure. (Voyez à ce sujet le § 50).

Si la figure est trop grande ou si les longueurs des ordonnées varient trop pour pouvoir s'attendre à une approximation suffisante en ne mesurant que 9 ordonnées et si l'on ne veut pas composer une formule destinée spécialement au nombre d'ordonnées qu'on voudra mesurer, il sera bon, pour obtenir plus d'exactitude, de subdiviser la figure en *p* bandes de largeur inégale — en resserrant les intervalles aux endroits où les ordonnées croissent ou décroissent rapidement — et appliquer l'approximation à chaque bande en particulier. De cette manière il est toujours possible de rendre l'approximation aussi grande qu'on le désire.

Il est superflu de faire observer que toutes les autres formules développées dans cette étude, donnent lieu à la même remarque (8).

§ 49. Les valeurs de corr: dans la table F font voir que 2, 4 et 6 ordonnées donnent à peu près la même exactitude que respectivement 3, 5 et 7 ordonnées. Par conséquent le mesurage de 2, 4 et 6 ordonnées doit être pris en sérieuse considération (contrairement à ce qu'on a pu observer dans le § 35, concernant les formules de Newton-Cotes et de MacLaurin).

La table G ci-après a été dressée pour pouvoir, en cas de mesurage, calculer facilement et avec une exactitude suffisante les longueurs des abscisses qui appartiennent à $n=2$, 4, 6 et 9 ordonnées.

Supposons, par exemple, que $A'B'=H$ contienne 527 unités de longueur et que n soit égal à 4, on trouve alors, en comptant du point O, fig. 2, $A'O$ étant égal à $\frac{527}{2}=$ $=263{,}5$ unités de longueur, suivant la table G, pour les longueurs des abscisses à mesurer,

	x_1:	x_2:
200	18,759	79,465
60	5,628	23,840
3	0,281	1,192
0,5	0,047	0,199
263,5	24,7	104,7

§ 50. Dans chaque formule de la table F, les coefficients B_p sont positifs et égaux entre eux.

Quant à la valeur des coefficients B_p dans les diverses formules des tables A, B et F pour I, pour une même valeur de n, il faut remarquer ce qui suit:

Si on compare, par exemple, les trois formules pour $n=9$ des tables A, B et F on voit alors que les premiers termes de correction de ces formules sont du même degré. Par conséquent ces trois formules ont une exactitude à peu près égale, à condition toutefois que les valeurs de y_p y soient exprimées à un nombre de décimales tel qu'un nombre plus grand encore n'aurait pas d'influence sur la dernière décimale dans laquelle on veut exprimer la valeur de I.

Si la courbe AB est donnée par une équation, les valeurs de x_p et de y_p peuvent toujours être déterminées aussi

exactement qu'on le désire. Mais cela n'est plus possible quand on ne connaît pas la loi selon laquelle les points de la courbe se suivent, par exemple, quand la courbe est tracée au hasard, ou quand quelques points seulement en sont connus, soit par l'observation, soit par le mesurage, soit par l'évaluation, etc. Dans ce cas, chacune des valeurs de x_p et de y_p, et, par conséquent, aussi la valeur de I, sera affectée d'une erreur probable qui deviendra plus grande à mesure

1° que les instruments dont on se sert pour l'observation, le mesurage, l'évaluation, etc. de x_p et de y_p procurent une approximation moins exacte, et

2° que la somme des seconds degrés de B_p est plus grande.

Donc, si l'on a besoin d'une grande exactitude et si l'on a, pour calculer I, le choix entre plusieurs formules différentes, on devra se servir de la formule dont l'erreur probable de I est la plus petite.

Il résulte de cette observation qu'en cas de mesurage des coordonnées, les formules de la table F sont préférables à celles des tables A et B et même souvent à celles de la table C, à cause que dans chaque formule de la table F les coefficients B_p sont égaux entre eux, par quoi l'erreur probable des formules de la table F est plus petite que celle des formules des tables A, B et C pour un même nombre d'ordonnées à mesurer.

Formules d'approximation d'après l'auteur de cette étude.

§ 51. Les formules générales sub (58) se changent, quand $B_p = \frac{1}{m}$, en

$$\left.\begin{aligned}
r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_m^2 &= \frac{m}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = a_2, \\
r_1^4 + r_2^4 + \ldots + r_m^4 &= \frac{m}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = a_4, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
r_1^{2m-2} + r_2^{2m-2} + \ldots + r_m^{2m-2} &= \frac{m}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = a_{2m-2}, \\
r_1^{2m} + r_2^{2m} + \ldots + r_m^{2m} &= \frac{m}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - m.\delta_{2m} = a_{2m}.
\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Ici aussi les inconnues sont les racines de l'équation

$$r^{2m} - S_1\, r^{2m-2} + S_2\, r^{2m-4} - \ldots (-1)^m\, S_m = 0 \;\ldots\ldots (72)$$

dans laquelle

$$p\, S_p = S_{p-1} \,.\, \mathfrak{a}_2 - S_{p-2} \,.\, \mathfrak{a}_4 + \ldots (-1)^{p-1} \,.\, \mathfrak{a}_{2p} \;\ldots\ldots (73)$$

Ensuite on a [voyez (66) et (67)]

$$\text{corr:} = \delta_{2m} \,.\, H^{2m+1}\, \mathfrak{a}_{2m} + \left\{ \frac{1}{2m+3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} - \frac{1}{m} \left(r_1^{\,2m+2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + r_2^{\,2m+2} + \ldots + r_m^{\,2m+2} \right) \right\} H^{2m+3}\, a_{2m+2} + \text{etc.} \;\ldots (74)$$

ou

$$\text{corr:} = \delta_{2m}\, H^{2m+1}\, \mathfrak{a}_{2m} + \left\{ \frac{1}{2m+3} - \frac{2^2\, S_1}{2m+1} + \frac{2^4\, S_2}{2m-1} - \right.$$
$$\left. - \ldots (-1)^m \frac{2^{2m}\, S_m}{3} + 2^{2m+2}\, \delta_{2m}\, S_1 \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} H^{2m+3}\, a_{2m+2} + \text{etc.} \;(75)$$

On trouve d'après (71) et (73) pour les équations que nous avions en vue sub (72), pour

$$\left.\begin{aligned}
m = 2 &: r^4 - \frac{2}{12} r^2 + \frac{1}{720} + \delta_{2m} = 0, \\
m = 3 &: r^6 - \frac{3}{12} r^4 + \frac{1}{80} r^2 - \frac{1}{6720} + \delta_{2m} = 0, \\
m = 4 &: r^8 - \frac{4}{12} r^6 + \frac{11}{360} r^4 - \frac{37}{45360} r^2 - \frac{43}{1088\,6400} + \\
&\qquad + \delta_{2m} = 0, \\
m = 5 &: r^{10} - \frac{5}{12} r^8 + \frac{1}{18} r^6 - \frac{25}{9072} r^4 + \frac{17}{43\,5456} r^2 - \\
&\qquad - \frac{43}{5748\,0192} + \delta_{2m} = \text{et} \\
m = 6 &: r^{12} - \frac{6}{12} r^{10} + \frac{7}{80} r^8 - \frac{11}{1680} r^6 + \frac{9}{4\,4800} r^4 - \\
&\qquad - \frac{1}{42\,2400} r^2 - \frac{2161}{322\,8825\,6000} + \delta_{2m} = 0.
\end{aligned}\right\} (76)$$

Plusieurs séries d'abscisses dont on peut se servir avec avantage peuvent être dérivées de ce groupe d'équations.

§ 52. Premièrement on trouve une série de valeurs r_p en attribuant à δ_{2m}, dans chaque équation de (76), une valeur minimum qui satisfasse à la condition que toutes les racines dans l'équation en question demeurent ou deviennent réelles. On a vu dans le § 46 que pour une valeur minimum de δ_{2m}, pour $m=2$ et $m=3$, δ_{2m} doit être zéro.

Pour $m=4$ les racines ne peuvent pas être réelles tant que $\delta_{2m} < \frac{43}{1088\ 6400}$; aussitôt que $\delta_{2m} = \frac{43}{1088\ 6400}$, les racines sont réelles et δ_{2m} a sa valeur minimum. Les racines restent réelles et sont propres à l'usage si, dans certaines limites, δ_{2m} est pris plus grand que $\frac{43}{1088\ 6400}$; mais avec des valeurs croissantes de δ_{2m} la correction, qui appartient à la formule en question grandit aussi. Une observation analogue peut être faite relativement à l'équation pour $m=6$.

Quant à l'équation pour $m=5$, il y a lieu de faire remarquer ce qui suit. Quand on y écrit successivement $\delta_{2m} = \frac{43}{5748\ 0192}$, $\delta_{2m} = \frac{42}{5748\ 0192}, \ldots$ et $\delta_{2m} = \frac{34}{5748\ 0192}$, les racines des équations consécutives demeurent toujours réelles. Il va de soi qu'avec une valeur descendante de δ_{2m} la correction, qui appartient à l'équation pour $m=5$, devient continuellement plus petite aussi. On reconnaît aisément que les racines de l'équation dans laquelle on a pris $\delta_{2m} = \frac{33{,}42\ 9176}{5748\ 0192}$ sont réelles encore, mais que l'équation dans laquelle on a posé $\delta_{2m} = \frac{33{,}42\ 9175}{5748\ 0192}$ contient des racines imaginaires. Il paraîtra clairement dans l'extraction des racines elles-mêmes que $\frac{33{,}4291\ 7562\ 0184\ 062}{5748\ 0192}$ est la valeur la plus petite qui peut être attribuée à δ_{2m}. On trouve pour $m=5$ que les valeurs les plus avantageuse de $r_p{}^2$ sont les racines de l'équation

$$r^{10} - \frac{5}{12} r^8 + \frac{1}{18} r^6 - \frac{25}{9072} r^4 + \frac{17}{43\ 5456} r^2 - \frac{9{,}5708\ 2437\ 9815\ 938}{5748\ 0192} = 0$$

qui contient deux racines égales, notamment

$r_1^2 = r_2^2 = 0{,}0096\ 2085\ 36$ ou $r_1 = r_2 = 0{,}0980\ 8600\ldots,$
et ensuite $r_3^2 = 0{,}0816\ 1789\ 83$ » $r_3 = 0{,}2856\ 8846\ldots,$
$r_4^2 = 0{,}1041\ 1530\ 19$ » $r_4 = 0{,}3226\ 6903\ldots,$
et $r_5^2 = 0{,}2116\ 9175\ 93$ » $r_5 = 0{,}4600\ 9973\ldots.$

En représentant les ordonnées qui correspondent à $\pm x_1 = \pm x_2$, $\pm x_3$, $\pm x_4$ et $\pm x_5$, respectivement par $y_{\pm 1}$, $y_{\pm 2}$, $y_{\pm 3}$ et $y_{\pm 4}$, nous trouvons

$$I = \frac{1}{10} H \left\{ 2(y_{-1} + y_{+1}) + (y_{-2} + y_{+2}) + (y_{-3} + y_{+3}) + (y_{-4} + y_{+4}) \right\}$$

et, d'après (74) ou (75),

$$\text{corr:} = \frac{33{,}42\ 9176}{5748\ 0192} H^{11} a_{10} + \text{etc.} = 0{,}0000\ 0058\, H^{11} a_{10} + \text{etc.}$$

Les valeurs de r_p, I et corr: pour $m = 5$ sont recueillies dans la table H; les indices de r_p y sont diminués de un.

§ 53. Secondement, si l'on prend, dans chaque équation sub (76), la somme des deux derniers termes dans le premier membre égale à zéro, alors les ordonnées y_{-1} et y_{+1} tombent ensemble sur l'axe Y, de telle sorte que le nombre des ordonnées à mesurer est diminué de un.

En posant, par exemple, dans la formule pour $m = 3$, $\delta_{2m} = \frac{1}{6720}$, cette équation devient

$$r_1^2 = 0 \text{ et } r^4 - \frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{80} = 0$$

d'où

$$r_1 = 0,\ r_2 = 0{,}2628\ 6556\ldots \text{ et } r^3 = 0{,}4253\ 2540\ldots.$$

Ensuite on a

$$I = \frac{1}{6} H \left\{ 2 y_1 + (y_{-2} + y_{+2}) + (y_{-3} + y_{+3}) \right\}$$

et

$$\text{corr:} = \frac{1}{6720} H^7 a_6 = 0{,}0001\ 488\ldots H^7 a_6.$$

Si dans la formule pour $m=4$ on pose $\delta_{2m}=\frac{43}{1088\ 6400}$, on trouve alors successivement

$$r_1^2=0,\ r^6-\frac{1}{8}r^4+\frac{11}{360}r^2-\frac{37}{45\ 360}=0,$$

$r_1=0$, $r_2=0{,}2218\ \ 7726\ldots$, $r_3=0{,}2863\ 0921\ldots$ et $r_4=0{,}4495\ 8967\ldots$;

$$I=\frac{1}{8}H\left\{2y_1+(y_{-2}+y_{+2})+(y_{-3}+y_{+3})+(y_{-4}+y_{+4})\right\}$$

et, d'après (74) ou (75);

$$\text{corr:}=\frac{43}{1088\ 6400}H^9a_8=0{,}0000\ 0395\ldots\ H^9a_8.$$

Les valeurs de r_p, I et corr: calculées suivant ce § pour $m=2$, 3, 4 et 5, sont recueillies aussi dans la table H pour $n=3$, 5, 7 et 9; elles donnent, pour le même nombre d'ordonnées à mesurer, un résultat plus exact que celles de la table F, excepté cependant le cas de $n=5$. En effet, on trouve pour $n=5$, suivant la méthode que nous venons de développer dans ce §, corr: $=\frac{1}{6720}H^7a_6$, tandis que suivant la méthode développée dans le § 47, on trouve pour un nombre égal d'ordonnées à mesurer, comme il ressort de la table F, corr: $=\frac{1}{7444}H^7a_6$. C'est pour cela que les abscisses et la correction de la table F sont recueillies aussi, pour $n=5$, dans la table H.

§ 54. En troisième lieu, on peut poser la condition que de part et d'autre de l'axe Y deux ordonnées, par exemple, y_{-p} et $y_{-(p+1)}$, y_{+p} et $y_{+(p+1)}$ doivent tomber l'une sur l'autre, de manière que ces quatre ordonnées n'en forment que deux à mesurer. Prenons comme exemple l'équation sub (76) pour $m=4$.

Si les racines r_p et r_{p+1} sont égales, il faut que cette équation puisse être représentée par

$$(r^2 - r_p{}^2)^2 (r^4 - Pr^2 + Q) = r^8 - (P + 2r_p{}^2) r^6 +$$
$$+ (Q + 2\,Pr_p{}^2 + r_p{}^4) r^4 - (Pr_p{}^2 + 2\,Q) r^2 + Qr_p{}^4 = 0,$$

de sorte qu'on a

$$P + 2\,r_p{}^2 = \frac{1}{3},$$
$$Q + 2\,Pr_p{}^2 + r_p{}^4 = \frac{11}{360},$$
$$Pr_p{}^2 + 2\,Q = \frac{37}{45360} \text{ et}$$
$$Qr_p{}^4 = - \frac{43}{1088\;6400} + \delta_{2m},$$

d'où

$$r_p{}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - P\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$
$$Q = \frac{1}{360} - \frac{1}{6}\,P + \frac{3}{4}\,P^2 \quad . \quad . \quad (78)$$
$$22680\,P^3 - 11340\,P^2 + 1386\,P - 5 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

et

$$\delta_{2m} = r_p{}^4\,Q + \frac{43}{1088\;6400} \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Les racines de l'équation sub (79) sont

$$P' = 0{,}0037\;1987\;71\ldots,$$
$$P'' = 0{,}2000\;9341\;69\ldots \text{ et}$$
$$P''' = 0{,}2961\;8670\;60\ldots$$

On trouve pour P' d'après (78) $Q = 0{,}0021\;6828\ldots$; par conséquent on doit avoir

$$r^4 - Pr^2 + Q = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

ou

$$r^4 - 0{,}0037\;1988\;r^2 + 0{,}0021\;6828 = 0;$$

mais puisque Q est plus grand que $\frac{1}{4}\,P^2$, l'équation n'a pas de solution réelle; de sorte que la valeur de P' ne peut pas nous servir.

La racine P'' donne une valeur négative à Q de (78), de sorte que l'équation sub (81), n'admettrait pas deux racines positives; il en résulte que P'' doit être rejetée aussi.

On trouve pour la racine P''' de (77)

$$r_p^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - P'''\right) = 0{,}0185\ 7331\ 36\ldots.$$

et de ceci

$$r_1 = 0{,}1362\ 8394\ 6\ldots.$$

Il s'ensuit d'après (78) $Q = 0{,}0192\ 0825\ 04\ldots.$ et ainsi pour l'équation sub (81)

$$r^4 - 0{,}2961\ 8670\ 60\ r^2 + 0{,}0192\ 0825\ 04 = 0$$

d'où

$$r_2 = 0{,}3096\ 8893\ 5\ldots \text{ et } r_3 = 0{,}4475\ 2594\ 4\ldots$$

Enfin d'après (80) nous trouvons

$$\text{corr:} = \delta_{2m}\,.\,H^9\,a_8 = 0{,}0000\ 105\,..\,H^9\,a_8;$$

tandis que

$$I = \frac{1}{8}\,H\,\{2\,(y_{-1} + y_{+1}) + (y_{-2} + y_{+2}) + (y_{-3} + y_{+3})\}.$$

Les résultats qu'on obtient suivant cette méthode pour $n = 2$, 4, 6 et 8, figurent aussi dans la table H. Pour $n = 10$, on n'obtient pas de valeurs dont on puisse se servir. Dans la méthode selon Hermite-Tchebichef le fait se produit déjà pour $n = 8$.

Notes.

a. La méthode développée ci-dessus peut être traitée d'une manière plus générale.

Supposons, par exemple, que, dans le cas de $n = 4$ ordonnées à mesurer, c'est à dire pour $m = 2$, on veuille représenter l'aire approchée de la figure par la formule

$$I = H\,.\,\frac{1}{2\,(p+1)}\left\{p\,(y_{-1} + y_{+1}) + (y_{-2} + y_{+2})\right\}$$

on trouve alors des équations

$$B_1 + \quad B_2 = 1,$$
$$r_1^2 B_1 + r_2^2 B_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ et}$$
$$r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

dans lesquelles $B_1 = p\, B_2$, successivement

$$r_2^2 = \frac{p+1}{12} - p\, r_1^2, \quad r_2^4 = \frac{p+1}{80} - p\, r_1^4$$

et

$$r_1^2 = \frac{1}{12} \pm \frac{1}{30p} \sqrt{5p}.$$

De ces deux expressions pour r_1^2, seulement celle avec le signe négatif peut servir, attendu que le signe positif rend r_2^2 négatif.

Pour $r_1^2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{30p}\sqrt{5p}$, on trouve $r_2^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{30}\sqrt{5p}$.

Ces expressions pour r_1^2 et r_2^2 exigent que

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{30p}\sqrt{5p} \geqq 0 \text{ et } \frac{1}{12} + \frac{1}{13}\sqrt{5p} \leqq \frac{1}{4}$$

d'où résulte ensuite que les égalités

$$r_1 = \sqrt{\left\{\frac{1}{12} - \frac{1}{30p}\sqrt{5p}\right\}} \text{ et } r_2 = \sqrt{\left\{\frac{1}{12} + \frac{1}{30}\sqrt{5p}\right\}}$$

ne valent que pour $p = 1$ jusqu'à $p = 5$ inclusivement.

Le premier terme de correction qui appartient à l'expression pour I posée ci-dessus, est

$$\text{corr:} = \left\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - (r_1^6 B_1 + r_2^6 B_2)\right\} H^7 a_6 =$$
$$= \left\{0{,}0002\ 6455\ldots - \frac{(p-1)\sqrt{5p}}{5400\, p}\right\} H^7 a_6,$$

d'où l'on trouve

pour $p = 1$: corr: $=$ $0{,}0002\ 6455\ H^7 a_6$ (Table F),
» $p = 2$: » $= -\,0{,}0000\ 2825\ H^7 a_6$ (» H),
» $p = 3$: » $= -\,0{,}0002\ 1360\ H^7 a_6$,
» $p = 4$: » $= -\,0{,}0003\ 5658\ H^7 a_6$ et
» $p = 5$: » $= -\,0{,}0004\ 7619\ H^7 a_6$,

ce qui prouve que les abscisses de la table H donnent le résultat le plus exact; puis celles pour $p = 3$ [pour lesquelles

$$I = \frac{1}{8} H \left\{ 3 (y_{-1} + y_{+1}) + (y_{-2} + y_{+2}) \right\}$$

$$r_1 = 0{,}2007\ 49 \ldots \text{ et } r_2 = 0{,}4609\ 04 \ldots]$$

et ensuite seulement celles de la table F.

b. Pour un examen plus étendu du problème, ou pourrait calculer des expressions, pour I et corr:, en appliquant une méthode analogue, en quelque façon, à celle recommandée déjà par Newton (voyez l'avant-dernier alinéa du § 95). C'est à dire qu'on pourrait, également à gauche et à droite de l'axe Y, faire tomber ensemble les p premières ordonnées; ensuite les q ordonnées qui suivent immédiatement; puis les r ordonnées qui suivent immédiatement ces dernières, et ainsi de suite. Il est possible que de cette manière on trouve des expressions pour I et des valeurs pour corr: qui, dans certaines circonstances, seraient préférables à toutes celles déjà trouvées. Cependant un tel procédé, s'il était appliqué rigoureusement, nécessiterait des calculs très longs.

CHAPITRE IV.

Etant données les longueurs de quelques abscisses et les valeurs de quelques coefficients numériques qui se trouvent dans l'expression de l'aire approximative d'une figure, on demande de calculer les longueurs et les valeurs les plus avantageuses des abscisses et coefficients inconnus.

§ 55. Le cas enfin peut se présenter où l'on doit attribuer à $(m-p)$ grandeurs r_p et à p coefficients B_p des valeurs définies, et calculer d'après celles-ci les m valeurs correspondantes des grandeurs r_p et B_p inconnues encore; en particulier quand on veut élever quelques ordonnées sur des points déterminés de la base de la figure et attacher une condition aux coefficients dont ces ordonnées doivent être accompagnées

dans l'expression sub (21); par exemple qu'ils soient aussi grands que possible, ou égaux entre eux, etc.

Puisqu'il se trouve dans les $(m-1)$ équations sub (49) m grandeurs r_p et m grandeurs B_p, on peut attribuer à q grandeurs r_p et à $\{(m+1)-q\}$ grandeurs B_p, dans certaines limites, des valeurs arbitraires et en déduire les autres $(m-q)$ grandeurs r_p et $(q-1)$ grandeurs B_p.

Supposons, par exemple, qu'il y ait en (49) $m=4$ et que nous ayons donné à r_1, r_2, r_3, B_1 et B_2 des valeurs déterminées, alors (49) devient

$$\left.\begin{aligned} r_3^2 B_3 + r_4^2 B_4 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[r_1^2 B_1 + r_2^2 B_2\right], \\ r_3^4 B_3 + r_4^4 B_4 &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2\right] \text{ et} \\ r_3^6 B_3 + r_4^6 B_4 &= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left[r_1^6 B_1 + r_2^6 B_2\right] \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} r_4^2(r_4^2 - r_3^2) B_4 &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2\right] - \\ &\quad - \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[r_1^2 B_1 + r_2^2 B_2\right]\right\} r_3^2 \\ r_4^4(r_4^2 - r_3^2) B_4 &= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left[r_1^6 B_1 + r_2^6 B_2\right] - \\ &\quad - \left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2\right]\right\} r_3^2 \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

et

$$r_4^2 = \frac{\left\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left[r_1^6 B_1 + r_2^6 B_2\right]\right\} - \left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2\right]\right\} r_3^2}{\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2\right]\right\} - \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[r_1^2 B_1 + r_2^2 B_2\right]\right\} r_3^2};$$

et B_p peut être résous d'une des équations sub (83) et après B_3 d'une de celles sub (82). —

Si l'on veut encore introduire dans le calcul la condition que le premier terme de correction soit un minimum, il faut alors que $2m$ grandeurs r_p et B_p satisfassent aux m équations

$$r_1^2 B_1 + \quad r_2^2 B_2 + \ldots + \quad r_m^2 B_m = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$r_1^4 B_1 + \quad r_2^4 B_2 + \ldots + \quad r_m^4 B_m = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

. . . .

$$r_1^{2m-2} B_1 + r_2^{2m-2} B_2 + \ldots + r_m^{2m-2} B_m = \frac{1}{2\,m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} \quad \text{et}$$

$$r_1^{2m} B_1 + \quad r_2^{2m} B_2 + \ldots + \quad r_m^{2m} B_m = \frac{1}{2\,m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - \delta_{2m}.$$

Pour $m = 4$ et dans la supposition que des valeurs définies soient données à r_1, r_2, B_1 et B_2, on doit avoir

$$r_3^2 B_3 + r_4^2 B_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[r_1^2 B_1 + r_2^2 B_2\right],$$

$$r_3^4 B_3 + r_4^4 B_4 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2\right],$$

$$r_3^6 B_3 + r_4^6 B_4 = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left[r_1^6 B_1 + r_2^6 B_2\right] \quad \text{et}$$

$$v_3^8 B_3 + r_4^8 B_4 = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^8 - \left[r_1^8 B_1 + r_2^8 B_2 + \delta_{2m}\right];$$

d'où

$$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left[r_1^6 B_1 + r_2^6 B_2\right] -$$
$$- \left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left[r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2\right]\right\}(r_3^2 + r_4^2) +$$
$$+ \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[r_1^2 B_1 + r_2^2 B_2\right]\right\} r_3^2 r_4^2 = o \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^8 - \left[r_1^8 B_1 + r_2^8 B_2 + \delta_{2m}\right] -$$
$$- \left\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left[r_1^6 B_1 + r_2^6 B_2\right]\right\}(r_3^2 + r_4^2) +$$
$$+ \left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[r_1^4 B_1 + r_2^4 B_2\right]\right\} r_3^2 r_4^2 = o.$$

De ces deux équations $(r_3^2 + r_4^2)$ et $r_3^2 r_4^2$ peuvent être résolues, de sorte qu'on peut trouver r_3^2 et r_4^2 séparément.

CHAPITRE V.

Approximation du volume d'un solide terminé par deux surfaces planes parallèles entre elles.

§ 56. Soit une des deux surfaces planes du solide indiquée par le »plan B" et le solide décomposé en une infinité n de tranches d'une épaisseur Δ, au moyen de plans, parallèles au »plan B". Soit le volume de la $p^{\text{ième}}$ tranche $= v_p$ et le volume d'un cylindre droit circulaire dont la hauteur est Δ et le diamètre égal à celui d'un cercle ayant la même aire qu'une des surfaces planes limites de cette $p^{\text{ième}}$ tranche, égal à v'_p, alors la différence $v_p - v'_p$ n'est qu'une quantité infiniment petite par rapport à v_p elle-même.

Nous remplaçons chaque tranche, entre ses surfaces planes, par un tel cylindre et déplaçons tous ces cylindres dans la direction du »plan B", jusqu'à ce que les centres de leurs plans limites tombent dans une ligne droite β, perpendiculaire au »plan B".

De cette manière un solide de révolution remplace le solide arbitraire, et le volume de l'un ne diffère qu'infiniment peu du volume de l'autre. Par conséquent ces deux volumes peuvent être considérés comme égaux entre eux.

Si la section de la surface courbe du solide de révolution avec un plan passant par la ligne β est une courbe dont l'équation répond à la série convergente sub (19), il est clair qu'alors le volume du solide de révolution, ou, ce qui revient au même, que le volume du solide arbitraire peut être déduit approximativement des formules pour I, développées dans cette étude.

Pour calculer approximativement le volume du solide on n'a qu'à remplacer, dans les expressions pour I, $(y_{-p} + y_{+p})$ par la somme des aires des deux sections du solide avec des plans parallèles au plan B situés à une distance x_p du point à partir duquel on a placé les abscisses.

CHAPITRE VI.

Approximation de la valeur des intégrales

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} . dx, \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^q f(x) . dx, \text{ etc.}$$

§ 57. Toutes les formules développées jusqu'ici sont fondées sur cette hypothèse que la courbe AB peut être remplacée, avec une approximation suffisante, par une ligne parabolique.

Il arrive cependant que la fonction à intégrer ne puisse pas être représentée par une ligne parabolique tandis que c'est bien le cas avec un des facteurs dans lesquels la fonction peut être décomposée. Il arrive aussi que l'un des facteurs soit une fonction à laquelle on ne parvient qu'en mesurant un grand nombre d'ordonnées, tandis qu'au contraire l'autre est une fonction donnée. Etc.

Nous traiterons ici deux de ces cas.

§ 58. Posons d'abord l'intégrale

$$I' = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} . dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

en supposant que $f(x)$ puisse être remplacé avec une exactitude illimitée par la série convergente

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(y'_{-q} + y'_{+q}\right) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots + a_{2m} x^{2m} + \\ + a_{2m+2} x^{2m+2} + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Ici l'application des formules des tables qui suivent ne conduirait pas à la plus grande approximation possible.

En effet, la fonction $f(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)}$ peut bien être représentée par une courbe, mais la dérivée de cette fonction devient infinie pour les valeurs limites $x = -\frac{1}{2}$ et $x = +\frac{1}{2}$, de sorte que les tangentes aux points correspondants de la courbe sont perpendiculaires à l'axe X, ce qui ne peut pas

avoir lieu avec une ligne parabolique. Aussi la formule (84), ne satisfaisant pas à la condition principale posée dans le § 6, 4ième alinéa, il est nécessaire de transformer la fonction avant d'y appliquer l'approximation.

Nous remplaçons la ligne sub (85) par une ligne parabolique ayant $2m$ points de communs avec la première; soient $(-x_p, y_{-p})$ et (x_p, y_{+p}) les coordonnées d'une couple de ces points, symétriques par rapport à l'axe Y, et soit l'équation de la seconde ligne parabolique représentée par

$$\frac{1}{2}\left(y_{-p}+y_{+p}\right)=c_0+c_2\,x^2+c_4\,x^4+\ldots+c_{2m-2}\,x^{2m-2}\ldots (86)$$

La valeur exacte I' de l'intégrale sub (84) est alors:

$$I'=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\left\{a_0+a_2\,x^2+\ldots+a_{2m}\,x^{2m}+\right.$$

$$\left.+\,a_{2m+2}\,x^{2m+2}+\text{etc.}\right\}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,.\,dx=$$

$$=a_0\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx+a_2\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^2\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,.\,dx+$$

$$+\ldots+a_{2m+2}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^{2m+2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx+\text{etc.}\;\ldots (87)$$

et la valeur approchée

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\left\{c_0+c_2\,x^2+\ldots+c_{2m-2}\,x^{2m-2}\right\}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=$$

$$=c_0\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx+c_2\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^2\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx+$$

$$+\ldots+c_{2m-2}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^{2m-2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx\;\ldots (88)$$

La première intégrale de (87) et celle de (88) ont chacune la valeur de $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi=\frac{1}{8}\pi$; puisqu'elles représentent la surface d'un demi-cercle dont le rayon est égal à la moitié de l'unité de longueur.

Les autres intégrales peuvent être réduites à celle-ci, en vertu de la formule générale

$$\int x^p \sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx = \frac{x^{p-1}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{p+2} + \frac{p-1}{p+2}\int x^{p-2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx.$$

En substituant ici les limites $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, on a

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+} x^p \sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx = \frac{p-1}{p+2}\left(\frac{1}{4}\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^{p-2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,.\,dx;$$

d'où pour $p = 2, 4, 6, 8$, etc.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+} x^2 \sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{8}\pi;$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^2\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{1}{8}\pi;$$

. . . .

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^{2p-2} \sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx = \frac{2p-3}{2p}\cdot\frac{2p-5}{2p-2}\cdots\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{p-1}\cdot\frac{1}{8}\pi;$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^{2p} \sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx = \frac{2p-1}{2p+2}\cdot\frac{2p-3}{2p}\cdots\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{p}\cdot\frac{1}{8}\pi;$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^{2p+2} \sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx = \frac{2p+1}{2p+4}\cdot\frac{2p-1}{2p+2}\cdots\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{p+1}\frac{1}{8}\pi;$$

etc. En transportant ces résultats en (87) et (88) on trouve

$$I' = \frac{1}{8}\pi\left\{a_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)a_2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^2 a_4 + \right.$$
$$+\cdots+\frac{1.3\ldots(2m-5)(2m-3)}{4.6\ldots(2m-5)2m}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}a_{2m-2} +$$
$$+\frac{1.3\ldots(2m-3)(2m-1)}{4.6\ldots\quad 2m(2m+2)}\left(\frac{1}{4}\right)^{m}a_{2m} +$$
$$\left.+\frac{1.3\ldots(2m-1)(2m+1)}{4.6\ldots(2m+2)(2m+4)}\left(\frac{1}{4}\right)^{m+1}a_{2m+2} + \text{etc.}\right\} \quad (89)$$

et

$$I = \frac{1}{8}\pi\left\{c_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)c_2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^2 c_4 + \right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1.3\ldots(2m-5)(2m-3)}{4.6\ldots(2m-2)2m}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}c_{2m-2}\right\} \quad (90)$$

En substituant en (86) les valeurs des abscisses des $2m$ points connus de la ligne sub (85), on trouve, comme dans le § 13, m équations dont les coefficients c_{2p} peuvent être exprimés dans les demi-sommes des m couples d'ordonnées connues. Les valeurs des coefficients substituées en (90) conduisent à une expression pour la valeur approchée de l'intégrale de la forme

$$I=\frac{1}{8}\pi\left\{B_1\,.\frac{y_{-1}+y_{+1}}{2}+B_2\,.\frac{y_{-2}+y_{+2}}{2}+\right.$$
$$\left.+\ldots+B_m\,.\frac{y_{-m}+y_{+m}}{2}\right\} \quad (91)$$

et à une de la forme

$$\begin{aligned}I=\frac{1}{8}\pi\Big[&\left\{B_1+B_2+\ldots+B_m\right\}a_0+\\ +&\left\{x_1^{\,2}B_1+x_2^{\,2}B_2+\ldots+x_m^{\,2}B_m\right\}a_2+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +&\left\{x_1^{\,2m-2}B_1+x_2^{\,2m-2}B_2+\ldots+x_m^{\,2m-2}B_m\right\}a_{2m-2}+\\ +&\left\{x_1^{\,2m}B_1+x_2^{\,2m}B_2+\ldots+x_m^{\,2m}B_m\right\}a_{2m}+\\ +&\left\{x_1^{\,2m+2}B_1+x_2^{\,2m+2}B_2+\ldots+x_m^{\,2m+2}B_m\right\}a_{2m+2}+\text{ etc.}\Big]\end{aligned} \quad (92)$$

En soustrayant (92) de (89) nous trouvons pour la correction de I l'expression suivante:

$$\begin{aligned}I'-I=\frac{1}{8}\pi\Big[&\Big\{1-\\ &-(B_1+B_2+\ldots+B_m)\Big\}a_0+\\ &+\Big\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)-\\ &-(x_1^{\,2}B_1+x_2^{\,2}B_2+\ldots+x_m^{\,2}B_m)\Big\}a_2+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

. . . .

$$+\left\{\frac{1.3\ldots(2m-5)(2m-3)}{4.6\ldots(2m-2)2m}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}-\right.$$

$$\left.-(x_1^{2m-2}B_1+x_2^{2m-2}B_2+\ldots+x_m^{2m-2}B_m)\right\}a_{2m-2}+$$

$$+\left\{\frac{1.3\ldots(2m-5)(2m-3)(2m-1)}{4.6\ldots(2m-2)2m(2m+2)}\left(\frac{1}{4}\right)^{m}-\right.$$

$$\left.-(x_1^{2m}B_1+x_2^{2m}B_2+\ldots+x_m^{2m}B_m)\right\}a_{2m}+$$

$$+\left\{\frac{1.3\ldots(2m-5)(2m-3)(2m-1)(2m+1)}{4.6\ldots(2m-2)2m(2m+2)(2m+4)}\left(\frac{1}{4}\right)^{m+1}-\right.$$

$$\left.-(x_1^{2m+2}B_1+x_2^{2m+2}B_2+\ldots+x_m^{2m+2}B_m)\right\}a_{2m+2}+$$

$$\left.+\ \text{etc.}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

Cette expression donne lieu à une observation analogue à celle qui a été faite au § 17. En outre il est facile de voir aussi que des expressions pareilles à celles sub (91) ÷ (93) pour la valeur approchée I et la différence $I'-I$ d'un grand nombre d'intégrales de produits (4) peuvent être développées à peu près de la même manière que nous venons de le faire pour l'intégrale sub (84). Une indication plus détaillée ne nous semble pas nécessaire et nous croyons pouvoir nous borner à l'expression pour la valeur approchée de l'intégrale sub (84), dans le cas où en (93) on aurait adopté

$$\left.\begin{array}{l}
B_1+B_2+\ldots+B_m=1 \qquad =\mathfrak{a}_0 \\
x_1^2B_1+x_2^2B_2+\ldots+x_m^2B_m=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) \quad =\mathfrak{a}_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1^{2m-2}B_1+x_2^{2m-2}B_2+\ldots+x_m^{2m-2}B_m= \\
\qquad =\frac{1.3\ldots(2m-5)(2m-3)}{4.6\ldots(2m-2)2m}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}=\mathfrak{a}_{2m-2}
\end{array}\right\}(94)$$

Nous représentons en (93) les coefficients de a_{2m}, a_{2m+2}, etc. par $\mathfrak{d}_{2m}$, $\mathfrak{d}_{2m+2}$, etc. ainsi

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1.3\ldots(2m-1)}{4.6\ldots(2m+2)}\left(\frac{1}{4}\right)^{m} - (x_1^{2m}B_1 + x_2^{2m}B_2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + x_m^{2m}B_m) = \delta_{2m}, \\
&\frac{1.3\ldots(2m+1)}{4.6\ldots(2m+4)}\left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} - (x_1^{2m+2}B_1 + x_2^{2m+2}B_2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + x_m^{2m+2}B_m) = \delta_{2m+2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{1.3\ldots(4m-3)}{4.6\ldots\ 4m}\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-1} - (x_1^{4m-2}B_1 + x_2^{4m-2}B_2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + x_m^{4m-2}B_m) = \delta_{4m-2}, \\
&\frac{1.3\ldots(4m-1)}{4.6\ldots(4m+2)}\left(\frac{1}{4}\right)^{2m} - (x_1^{4m}B_1 + x_2^{4m}B_2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + x_m^{4m}B_m) = \delta_{4m}.
\end{aligned}\right\}(95)$$

Si on veut déterminer maintenant les valeurs de x_p de manière qu'elles conduisent à l'approximation la plus exacte (voyez dans le § 24 le développement de la méthode d'approximation d'après Gauss), on doit prendre en (95) $\delta_{2m}=o$, $\delta_{2m+2}=o$, ... $\delta_{4m-2}=o$. On trouve facilement la même expression que celle sub (29) pour $q=o$, et, alors, d'après (29) en relation avec (95), les équations nécessaires pour la solution de x_p; d'après (27) ou (28), en relation avec (94), une expression de B_p pour le calcul de I d'après (91), et enfin de la formule sub (30), en relation avec celle sub (95), une expression pour corr:.

Dans le cas de $m=3$, par exemple, on trouve d'après (29), en relation avec (95) pour la détermination de x_p^2, les équations suivantes:

$$\frac{1.3.5}{4.6.8}\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1.3}{4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) S_2 - S_3 = 0$$

$$\frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \frac{1.3.5}{4.6.8}\left(\frac{1}{4}\right)^3 S_1 + \frac{1.3}{4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^2 S_2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) S_3 = 0 \text{ et}$$

$$\frac{1.3.5.7.9}{4.6.8.10.12}\left(\frac{1}{4}\right)^5 - \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}\left(\frac{1}{4}\right)^4 S_1 + \frac{1.3.5}{4.6.8}\left(\frac{1}{4}\right)^3 S_2 - \frac{1.3}{4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^2 S_3 = 0$$

d'où

$$S_1 = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right), \; S_2 = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ et } S_3 = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

de sorte que les abscisses des points dont les ordonnées doivent être mesurées sont les racines de l'équation

$$x^6 - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)x^4 + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2 x^2 - \frac{1}{64}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0$$

ou

$$\left(4\,x^2\right)^3 - \frac{5}{4}\left(4\,x^2\right)^2 + \frac{3}{8}\left(4\,x^2\right) - \frac{1}{64} = 0$$

d'où

$4\,x_1^2 = 0{,}0495\ 1557\ldots$	$x_1^2 = 0{,}0123\ 7889\ldots$	$x_1 = 0{,}1112\ 6064\ldots$
$4\,x_2^2 = 0{,}3887\ 3954\ldots$	$x_2^2 = 0{,}0971\ 8489\ldots$	$x_2 = 0{,}3117\ 4490\ldots$
$4\,x_3^2 = 0{,}8117\ 4490\ldots$	$x_3^2 = 0{,}2026\ 8622\ldots$	$x_3 = 0{,}4504\ 8443\ldots$

Il résulte de (27):

$$B_p = \frac{a_4 - a_2\,\Sigma_1 + \Sigma_2}{x_p^{\,4} - x_p^{\,2}\,\Sigma_1 + \Sigma_2} = \frac{\frac{1.3}{4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\Sigma_1 + \Sigma_2}{x_p^{\,4} - x_p^{\,2}\,\Sigma_1 + \Sigma_2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{128} - \frac{1}{16}\Sigma_1 + \Sigma_2}{x_p^{\,4} - x_p^{\,2}\,\Sigma_1 + \Sigma_2}$$

ainsi

$$B_1 = \frac{\frac{1}{128} - \frac{1}{16}\left(x_2^{\,2} + x_3^{\,2}\right) + x_2^{\,2}\,x_3^{\,2}}{x_1^{\,4} - x_1^{\,2}\,(x_2^{\,2} + x_3^{\,2}) + x_2^{\,2}\,x_3^{\,2}} = 0{,}5432\ldots,$$

$$B_2 = \frac{\frac{1}{128} - \frac{1}{16}\left(x_1^{\,2} + x_3^{\,2}\right) + x_1^{\,2}\,x_3^{\,2}}{x_2^{\,4} - x_2^{\,2}\,(x_1^{\,2} + x_3^{\,2}) + x_1^{\,2}\,x_3^{\,2}} = 0{,}3492\ldots \text{ et}$$

$$B_3 = 1 - (B_1 + B_2) = 1 - 0{,}8925 \quad = 0{,}1075\ldots;$$

par conséquent, en vertu de (91),

$$I = \frac{1}{8}\,\pi\left\{0{,}5432\,.\,\frac{y_{-1} + y_{+1}}{2} + 0{,}3493\,.\,\frac{y_{-2} + y_{+2}}{2} + \right.$$

$$\left. + \; 0{,}1075\,\frac{y_{-3} + y_{+3}}{2}\right\};$$

tandis qu'on trouve, d'après (30), (93) et (95):

$$\text{corr:} = \frac{1}{8}\pi\left\{\frac{1.3.5.7.9.11}{4.6.8.10.12.14}\left(\frac{1}{4}\right)^6 - \frac{1.3.5.7.9}{4.6.8.10.12}\left(\frac{1}{4}\right)^5 S_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}\left(\frac{1}{4}\right)^4 S_2 - \frac{1.3.5}{4.6.8}\left(\frac{1}{4}\right)^3 S_3\right\} a_{12} =$$

$$= \frac{1.3.5}{4.6.8}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \frac{1}{8}\pi\left\{\frac{7.9.11}{10.12.14} - \frac{7.9}{10.12}\cdot\frac{5}{4} + \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{8} - \frac{1}{64}\right\} a_{12} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{27} \pi \cdot a_{12}.$$

§ 59. Quand on veut déterminer les abscisses des ordonnées à mesurer de telle manière que la valeur de I de l'aire sub (84) se trouve en prenant le produit de la base de la figure et la moyenne des ordonnées à mesurer (voyez dans le § 46 le développement de la méthode d'approximation d'après Hermite-Tchebichef), on a alors en vertu de (84) et (94):

$$\left.\begin{aligned} I' &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x) \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)}\, dx; \\ S_1 &= a_2 = \frac{m}{4}\left(\frac{1}{4}\right); \\ a_4 &= \frac{m \cdot 3}{4 \cdot 6}\left(\frac{1}{4}\right)^2; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2m} &= \frac{m \cdot 3 \ldots (2m-3)(2m-1)}{4 \cdot 6 \ldots 2m(2m+2)} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^m. \end{aligned}\right\} \quad (96)$$

Nous trouvons, comme dans le § 46, sub (70) que les $x_p{}^2$ sont les racines de l'équation

$$x^{2m} - S_1 x^{2m-2} + S_2 x^{2m-4} - \ldots (-1)^m S_m = o$$

dans laquelle

$$p S_p = S_{p-1} a_2 - S_{p-2} a_4 + \ldots (-1)^{p-1} a_{2p}$$

et que le premier terme de correction peut être représenté, par exemple, par

$$\text{corr:} = \frac{1}{8}\pi\left\{\frac{1.3\ldots(2m-1)(2m+1)}{4.6\ldots(2m+2)(2m+4)}\left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m}\left(x_1^{2m+2} + x_2^{2m+2} + \ldots + x_m^{2m+2}\right)\right\} a_{2m+2}.$$

Pour $m = 1$, on trouve: $S_1 = a_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$; par conséquent $x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0$, ainsi $x_1 = \frac{1}{4}$, comme dans la formule de MacLaurin (table *B*) pour la même valeur de *m*. Puis

$$\text{corr:} = \frac{1}{8}\pi\left\{\frac{1.3}{4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - x_1^4\right\} a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \pi . a_4.$$

Pour $m = 2$, on trouve: $S_1 = a_2 = \frac{1}{8}$ et $S_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} - \right.$ $\left. - \left(\frac{1}{4}\right)^3\right\} = 0$, par conséquent $x^4 - \frac{1}{8}x^2 = 0$ d'où $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{\frac{1}{8}} = 0,35355\ldots$ (Voyez la table *F*, pour $n = 3$). Ce résultat ne satisfait pas à la condition que les ordonnées à mesurer auront un même coefficient dans la formule pour *I*, puisque celle-ci devient

$$I = \frac{1}{8}\pi\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{y_1 + y_1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y_{-2} + y_{+2}}{2}\right\} = \frac{1}{16}\pi\left\{y_1 + \frac{y_{-2} + y_{+2}}{2}\right\};$$

cependant la formule est facile pour la pratique.

Pour $m = 3$, on trouve

$$S_1 = 3\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ S_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \text{ et } S_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

par conséquent

$$x^6 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 x^4 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4 x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = o$$

ou

$$(16x^2)^3 - 3(16x^2)^2 + 1,5(16x^2) - 0,5 = o$$

Dans cette équation, il y a deux racines imaginaires, d'où il s'ensuit qu'il n'est pas possible d'indiquer six ordonnées telles que, dans l'expression de l'aire de la figure, ces ordonnées soient affectées d'un même coefficient, et qu'en même temps elles satisfassent aux $m = 3$ conditions sub (96).

§ 60. Dans le cas où, pour une valeur de m, on ne peut pas satisfaire à la condition

$$a_{2m} = \frac{m.3\ldots(2m-3)(2m-1)}{4.6\ldots2m(2m+2)}\left(\frac{1}{4}\right)^m$$

on peut utiliser une des méthodes développées dans les §§ 47, 48 et 49.

On a alors

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = \frac{m}{4}\left(\frac{1}{4}\right) \quad = a_2;$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_m^4 = \frac{m.3}{4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = a_4;$$

. . . .

$$x_1^{2m-2} + x_2^{2m-2} + \ldots + x_m^{2m-2} =$$
$$= \frac{m.3\ldots(2m-3)}{4.6\ldots2m}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \quad = a_{2m-2},$$

$$x_1^{2m} + \quad x_2^{2m} + \ldots + x_m^{2m} \quad =$$
$$= \frac{m.3\ldots(2m-1)}{4.6\ldots(2m+2)}\left(\frac{1}{4}\right)^m - m.\delta_{2m} = a_{2m};$$

$$x^{2m} - S_1 x^{2m-2} + S_2 x^{2m-4} - \ldots(-1)^m S_m = o$$

$$pS_p = S_{p-1}a_2 - S_{p-2}a_4 + \ldots(-1)^{p-1}a_{2p} \text{ et}$$

$$\text{corr: } = \frac{1}{8}\pi.\delta_{2m}a_{2m}.$$

Pour $m = 3$, par exemple, on trouve, en appliquant la méthode du § 53:

$$S_1 = 3\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ S_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \text{ et } S_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^6 - \delta_m;$$

par conséquent

$$x^6 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 x^4 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4 x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^6 + \delta_m = o$$

d'où, en posant $\delta_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^6$, ainsi

$$\text{corr: } = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \pi a_6 = \left(\frac{1}{4}\right)^8 \pi a_6$$

et $x^2 = 0$ $\qquad (16x^2)^2 - 3(16x^2) + 1{,}5 = 0:$

$x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}1990\ 5631\ \ldots$ et $x_3 = 0{,}3845\ 4729\ \ldots.$

§ 61. Considérons en second lieu l'intégrale

$$I' = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^q f(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

Quand $f(x)$ peut être représenté, sans erreur notable, par la série

$$f(x) = \frac{1}{2}(y'_{-p} + y'_{+p}) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 +$$
$$+ \ldots + a_{2m-2} x^{2m-2} + a_{2m} x^{2m} + a_{2m+2} x^{2m+2} + \text{ etc.},$$

la valeur I' de l'intégrale peut être représentée par

$$I' = a_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^q\, dx + a_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^{q+2}\, dx + a_4 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^{q+4}\, dx + \text{etc.} =$$
$$= \frac{a_0}{q+1}\left(\frac{1}{2}\right)^q + \frac{a_2}{q+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{q+2} + \frac{a_4}{q+5}\left(\frac{1}{2}\right)^{q+4} +$$
$$+ \ldots + \frac{a_{2m-2}}{q+2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{q+2m-2} + \text{ etc.} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^q \left\{ \frac{a_0}{q+1} + \frac{a_2}{q+3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a_4}{q+5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \right.$$
$$+ \ldots + \frac{a_{2m-2}}{q+2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} +$$
$$\left. + \frac{a_{2m}}{q+2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} + \frac{a_{2m+2}}{q+2m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} + \text{ etc.} \right\}.$$

Soit la valeur approximative de l'intégrale représentée par

$$I = \left(\frac{1}{2}\right)^q \left\{ B_1 . \frac{y_{-1} + y_{+1}}{2} + B_2 . \frac{y_{-2} + y_{+2}}{2} + \right.$$
$$\left. + \ldots + B_m . \frac{y_{-m} + y_{+m}}{2} \right\} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^q \left[B_1 \left\{ a_0 + a_2 x_1^2 + a_4 x_1^4 + \right.\right.$$
$$\left. + \ldots + a_{2m-2} x_1^{2m-2} + a_{2m} x_1^{2m} + a_{2m+2} x_1^{2m+2} + \text{ etc.} \right\} +$$
$$+ B_2 \left\{ a_0 + a_2 x_2^2 + a_4 x_2^4 + \right.$$
$$\left. + \ldots + a_{2m-2} x_2^{2m-2} + a_{2m} x_2^{2m} + a_{2m+2} x_2^{2m+2} + \text{ etc.} \right\} +$$

. . . .

. . . .

$$+B_m\Big\{a_0+a_2x_m^2+a_4x_m^4+\ldots+$$

$$+a_{2m-2}x_m^{2m-2}+a_{2m}x_m^{2m}+a_{2m+2}x_m^{2m+2}+\text{etc.}\Big\}\Big]=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^q\Big[\Big\{\quad B_1+\quad B_2+\ldots+\quad B_m\Big\}a_0+$$

$$+\Big\{\quad x_1^2B_1+\quad x_2^2B_2+\ldots+\quad x_m^2B_m\Big\}a_2+$$

. . . .

$$+\Big\{x_1^{2m-2}B_1+x_2^{2m-2}B_2+\ldots+x_m^{2m-2}B_m\Big\}a_{2m-2}+$$

$$+\Big\{\quad x_1^{2m}B_1+\quad x_2^{2m}B_2+\ldots+\quad x_m^{2m}B_m\Big\}a_{2m}+$$

$$+\Big\{x_1^{2m+2}B_1+x_2^{2m+2}B_2+\ldots+x_m^{2m+2}B_m\Big\}a_{2m+2}+\text{etc.}\Big]$$

Par conséquent $I'-I=$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^q\Big[\Big\{\frac{1}{q+1}\qquad-(\quad B_1+$$

$$+\quad B_2+\ldots+\quad B_m)\Big\}a_0+$$

$$+\Big\{\frac{1}{q+3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\qquad-(\quad x_1^2B_1+$$

$$+\quad x_2^2B_2+\ldots+\quad x_m^2B_m)\Big\}a_2+$$

. . . .

$$+\Big\{\frac{1}{q+2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}-(x_1^{2m-2}B_1+$$

$$+x_2^{2m-2}B_2+\ldots+x_m^{2m-2}B_m)\Big\}a_{2m-2}+$$

$$+\Big\{\frac{1}{q+2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\quad-(\quad x_1^{2m}B_1+$$

$$+\quad x_2^{2m}B_2+\ldots+\quad x_m^{2m}B_m)\Big\}a_{2m}+$$

$$+\Big\{\frac{1}{q+2m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2}-(x_1^{2m+2}B_1+$$

$$+x_2^{2m+2}B_2+\ldots+x_m^{2m+2}B_m)\Big\}a_{2m+2}+\text{etc.}\Big]$$

Posons

$$B_1 + B_2 + \dots + B_m = \frac{1}{q+1},$$

$$x_1^2 B_1 + x_2^2 B_2 + \dots + x_m^2 B_m = \frac{1}{q+3}\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

. . . .

$$x_1^{2m-2} B_1 + x_2^{2m-2} B_2 + \dots + x_m^{2m-2} B_m = \frac{1}{q+2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}.$$

De ces équations nous trouvons d'après (27)

$$B_p = \frac{\frac{1}{q+2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} - \frac{1}{q+2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4}\Sigma_1 + \frac{1}{q+2m-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-6}\Sigma_2 \dots (-1)^{m-1}\frac{1}{q+1}\Sigma_{m-1}}{x_p^{2m-2} - x_p^{2m-4}\Sigma_1 + x_p^{2m-6}\Sigma_2 - \dots (-1)^{m-1}\Sigma_{m-1}}. \quad (98)$$

Puis nous posons

$$\frac{1}{q+2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - \left(x_1^{2m} B_1 + x_2^{2m} B_2 + \dots + x_m^{2m} B_m\right) = \delta_{2m};$$

$$\frac{1}{q+2m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2} - \left(x_1^{2m+2} B_1 + x_2^{2m+2} B_2 + \dots + x_m^{2m+2} B_m\right) = \delta_{2m+2};$$

. . . .

$$\frac{1}{q+4m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m-2} - \left(x_1^{4m-2} B_1 + x_2^{4m-2} B_2 + \dots + x_m^{4m-2} B_m\right) = \delta_{4m-2};$$

$$\frac{1}{q+4m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m} - \left(x_1^{4m} B_1 + x_2^{4m} B_2 + \dots + x_m^{4m} B_m\right) = \delta_{4m};$$

de sorte que nous avons, comme en (29), pour calculer les abscisses qui donnent une exactitude maximum, les m équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{q+2m+1}-\frac{2^2}{q+2m-1}S_1+\frac{2^4}{q+2m-3}S_2-\\ \quad-\frac{2^6}{q+2m-5}S_3+\ldots\left(-1\right)^m\frac{2^{2m}}{q+1}S_m=\delta_{2m}\quad=0\\ \frac{1}{q+2m+3}-\frac{2^2}{q+2m+1}S_1+\frac{2^4}{q+2m-1}S_2-\\ \quad-\frac{2^6}{q+2m-3}S_3+\ldots\left(-1\right)^m\frac{2^{2m}}{q+3}S_m=\delta_{2m+2}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{1}{q+4m-1}-\frac{2^2}{q+4m-3}S_1+\frac{2^4}{q+4m-5}S_2-\\ \quad-\frac{2^6}{q+4m-7}S_3+\ldots\left(-1\right)^m\frac{2^{2m}}{q+2m-1}S_m=\delta_{4m}=0\end{array}\right\}(99)$$

et enfin

$$\begin{array}{l}\text{corr:}=\left(\frac{1}{2}\right)^{q+4m}\left\{\frac{1}{q+4m+1}-\frac{2^2}{q+4m-1}S_1+\right.\\ \left.+\frac{2^4}{q+4m-3}S_2-\ldots\left(-1\right)^m\frac{2^{2m}}{q+2m+1}S_m\right\}a_{4m}\ldots(100)\end{array}$$

En résolvant les grandeurs S_p d'après (99), on trouve que les m inconnues $x_p{}^2$ sont les racines de l'équation

$$\left.\begin{array}{l}x^{2m}-S_1\,x^{2m-2}+S_2\,x^{2m-4}-\ldots(-1)^m S_m=0\\ \text{dans laquelle}\\ S_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\ \frac{m}{1}\ .\frac{q+2m-1}{q+4m-1};\\ S_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{m-1}{2}.\frac{q+2m-3}{q+4m-3}.S_1;\\ S_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{m-2}{3}.\frac{q+2m-5}{q+4m-5}.S_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_m=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\ \frac{1}{m}\ .\frac{q+1}{q+2m+1}S_{m-1}.\end{array}\right\}(101)$$

Si l'on pose $q=0$, on retrouve les formules de quadrature d'après Gauss que nous avons développées dans le § 24.

§ 62. Pour $q=1$ l'intégrale sub (97) devient

$$I' = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x f(x)\, dx$$

et les formules (98), (100) et (101) deviennent

$$B_p = \frac{\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} - \frac{1}{2m-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4}\Sigma_1 + \frac{1}{2m-4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-6}\Sigma_2 - \dots \left(-1\right)^{m-1}\frac{1}{2}\Sigma_{m-1}}{x_p^{2m-2} - x_p^{2m-4}\Sigma_1 + x_p^{2m-6}\Sigma_2 - \dots (-1)^{m-1}\Sigma_{m-1}};$$

$$\text{corr:} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4m+1}\left\{\frac{1}{4m+2} - \frac{2^2}{4m}\Sigma_1 + \frac{2^4}{4m-2}\Sigma_2 - \dots \left(-1\right)^m \frac{2^{2m}}{2m+2}\Sigma_m\right\} a_{4m},$$

et

$$x^{2m} - S_1 x^{2m-2} + S_2 x^{2m-4} - \dots (-1)^m S_m = 0$$

où

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{2m}{4m} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{m}{2m},$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{2m-2}{4m-2} S_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-1}{2m-1} \cdot S_1,$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{2m-4}{4m-4} S_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-2}{2m-2} \cdot S_2,$$

. . . .

$$S_m = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot S_{m-1}.$$

On trouve, pour $m=3$:

$$B_p = \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Sigma_1 + \frac{1}{2}\Sigma_2}{x_p^4 - x_p^2\Sigma_1 + \Sigma_2},$$

$$\text{corr:} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13}\left\{\frac{1}{14} - \frac{4}{12}\Sigma_1 + \frac{16}{10}\Sigma_2 - \frac{64}{8}\Sigma_3\right\} a_{12} \quad \text{et}$$

$$x^6 - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{16}\cdot\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{20} = 0$$

ou

$$\left(4x^2\right)^3 - \frac{3}{2}\left(4x^2\right)^2 + \frac{3}{5}\left(4x^2\right) - \frac{1}{20} = 0$$

d'où

$$4x_1^2 = 0{,}1127\,0107\ldots \quad x_1^2 = 0{,}0281\,7527\ldots \quad x_1 = 0{,}1678\,55\ldots$$
$$4x_2^2 = 0{,}5, \quad x_2^2 = 0{,}125 \quad x_2 = 0{,}3535\,53\ldots$$
$$4x_3^2 = 0{,}8872\,9893\ldots \quad x_3^2 = 0{,}2218\,2473\ldots \quad x_3 = 0{,}4709\,83\ldots$$

puis

$$B_1 = \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(x_3^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{2}\,x_3^2\,x_2^2}{x_1^4 - x_1^2\,(x_3^2 + x_2^2) + x_3^2\,x_2^2} = \frac{5}{36};$$

$$B_2 = \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(x_3^2 + x_1^2\right) + \frac{1}{2}\,x_3^2\,x_1^2}{x_2^4 - x_2^2\,(x_3^2 + x_1^2) + x_3^2\,x_1^2} = \frac{8}{36}, \quad \text{et}$$

$$B_3 = \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(x_2^2 + x_1^2\right) + \frac{1}{2}\,x_2^2\,x_1^2}{x_3^4 - x_3^2\,(x_2^2 + x_1^2) + x_2^2\,x_1^2} = \frac{5}{36};$$

ainsi, puisque

$$I = \frac{1}{2}\left\{B_1 \cdot \frac{y_{-1} + y_{+1}}{2} + B_2 \cdot \frac{y_{-2} + y_{+2}}{2} + \ldots + \right.$$
$$\left. + B_m \cdot \frac{y_{-m} + y_{+m}}{2}\right\},$$

$$I = \frac{1}{144}\left\{5\,(y_{-1} + y_{+1}) + 8\,(y_{-2} + y_{+2}) + 5\,(y_{-3} + y_{+3})\right\}.$$

L'intégrale sub (97) est un cas particulier de la suivante

$$I' = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m)\, f(x)\, dx$$

dont la valeur approximative est facile à calculer à présent.

CHAPITRE VII.

Développement des formules d'approximation de Stirling, Euler, etc.

Formules de **Stirling.**

§ 63. Il me paraît intéressant, au point de vue historique, de tirer quelques formules par un procédé différent de ceux employés dans les chapitres précédents.

Soit, fig. 4, $A_1 B_1$ une courbe arbitraire, dont les coordonnées de $2p$ points sont connues. Nous supposerons uniquement que ces points se trouvent deux à deux à des distances égales de l'axe Y, élevé au milieu de la base $A'B'$ de la figure $A'ABB'$, dont nous allons calculer l'aire approximative. Soit la base $A'B'$ égale à H. Nous traçons une ligne parabolique par les $2p$ points connus; soient $(-x_1, y_{-1})$ et (x_1, y_{+1}); $(-x_2, y_{-2})$ et (x_2, y_{+2}); ... $(-x_p, y_{-p})$ et (x_p, y_{+p}), les coordonnées de ces points; et soit $y=f(x)=$ $=a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots+a_{2p-1} x^{2p-1}$ l'équation de la ligne parabolique qui passe par les $2p$ points connus.

Les coordonnées des points connus donnent lieu aux $2p$ égalités suivantes

$$y_{-1}=a_0-a_1 x_1+a_2 x_1^2-a_3 x_1^3+\ldots-a_{2p-1} x_1^{2p-1},$$
$$y_{+1}=a_0+a_1 x_1+a_2 x_1^2+a_3 x_1^3+\ldots+a_{2p-1} x_1^{2p-1},$$
$$y_{-2}=a_0-a_1 x_2+a_2 x_2^2-a_3 x_2^3+\ldots-a_{2p-1} x_2^{2p-1},$$

etc. En additionnant la 1ère égalité à la 2de; la 3ième à la 4ième; etc. on obtient les p égalités:

$$\frac{1}{2}(y_{-1}+y_{+1})=a_0+a_2 x_1^2+a_4 x_1^4+\ldots+a_{2p-2} x_1^{2p-2},$$

$$\frac{1}{2}(y_{-2}+y_{+2})=a_0+a_2 x_2^2+a_4 x_2^4+\ldots+a_{2p-2} x_2^{2p-2},$$

etc., avec les p inconnues $a_0, a_2, a_4, \ldots a_{2p-2}$, qui peuvent en être tirées aisément et exprimées dans les valeurs x_q et $y_{\mp q}$ connues. Les expressions pour a_{2q} avec les indices pairs nous suffisent, parce que, comme il paraîtra tantôt,

celles avec les indices impairs ne sont pas nécessaires pour le calcul de l'aire approximative de la figure $A'ABB'$.

En exprimant a_0, a_2, ... a_{2p-2} en x_q et $y_{\mp q}$, successivement pour $p=2$, 3 et 4, nous verrons à la fin du § suivant que ces expressions, pour des valeurs plus élevées que $p=4$, peuvent être rédigées directement.

§ 64. Nous calculons l'aire de la figure $A'ABB'$ des deux manières suivantes:

Suivant la première manière, nous supposons que l'aire approximative I_1 est limitée par la ligne parabolique qui passe par seulement $2m$ points connus, m étant plus petit que p, c'est à dire par les points $(-x_1, y_{-1})$ et (x_1, y_1); $(-x_2, y_{-2})$ et (x_2, y_2); ... $(-x_m, y_{-m})$ et (x_m, y_m).

Soit $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2m-1}x^{2m-1}$ l'équation de cette ligne. On a alors

$$I_1=\int_{-\frac{1}{2}H}^{+\frac{1}{2}H}\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2m-1}x^{2m-1}\right\}dx=$$

$$=H\left\{a_0+\frac{1}{3}a_2\left(\frac{1}{2}H\right)^2+\ldots+\frac{1}{2m-1}a_{2m-2}\left(\frac{1}{2}H\right)^{2m-2}\right\}.$$

Suivant la seconde manière, l'aire approximative I_2 de la figure est supposée limitée par la ligne parabolique passant par tous les points connus $(-x_1, y_{-1})$ et (x_1, y_1) jusqu'à $(-x_p, y_{-p})$ et (x_p, y_p) inclusivement; on a alors (5):

$$I_2=H\left\{a'_0+\frac{1}{3}a'_2\left(\frac{1}{2}H\right)^2+\ldots+\frac{1}{2p-1}a'_{2p-2}\left(\frac{1}{2}H\right)^{2p-2}\right\}.$$

En soustrayant I_1 de I_2, la différence I_2-I_1 donne, d'après Stirling, la correction ou le terme auxiliaire pour I, ainsi

$$\text{corr}:=H\left\{(a'_0-a_0)+\frac{1}{3}(a'_2-a_2)\left(\frac{1}{2}H\right)^2+\ldots+\right.$$
$$+\frac{1}{2m-1}(a'_{2m-2}-a_{2m-2})\left(\frac{1}{2}H\right)^{2m-2}+$$
$$+\frac{1}{2m+1}a'_{2m}\left(\frac{1}{2}H\right)^{2m}+\frac{1}{2m+3}a'_{2m+2}\left(\frac{1}{2}H\right)^{2m+2}+\ldots+$$
$$\left.+\frac{1}{2p-1}a'_{2p-2}\left(\frac{1}{2}H\right)^{2p-2}\right\}.$$

§ 65. Supposons, par exemple, que $p=m+1$. On a alors pour $m=2$:

$$y=a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+a_3\,x^3,$$
$$y_1=a'_0+a'_1x+a'_2x^2+a'_3x^3+a'_4x^4+a'_5x^5 \text{ et}$$
$$\text{corr:}=H\left\{(a'_0-a_0)+\frac{1}{3}(a'_2-a_2)\left(\frac{1}{2}H\right)^2+\frac{1}{5}a'_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}.$$

En exprimant les valeurs de a'_0, a_0, a'_2, a_2, etc. dans les données et en substituant ces valeurs dans l'expression pour corr:, on trouve, en posant $x_p=r_p H$:

corr: = le produit de

$$(-1)^m\frac{H}{2}\left\{r_2^2r_1^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2(r_2^2+r_1^2)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}$$

et

$$\left\{\frac{y_{-3}+y_{+3}}{(r_3^2-r_2^2)(r_3^2-r_1^2)}+\frac{y_{-2}+y_{+2}}{(r_2^2-r_3^2)(r_2^2-r_1^2)}+\frac{y_{-1}+y_{+1}}{(r_1^2-r_3^2)(r_1^2-r_2^2)}\right\}.$$

Pour $m=3$ on aura:

corr: = le produit de

$$(-1)^m\frac{H}{2}\left\{r_3^2r_2^2r_1^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)(r_3^2r_2^2+r_3^2r_1^2+r_2^2r_1^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4(r_3^2+r_2^2+r_1^2)-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}$$

et

$$\left\{\frac{y_{-4}+y_{+4}}{(r_4^2-r_3^2)(r_4^2-r_2^2)(r_4^2-r_1^2)}+\frac{y_{-3}+y_{+3}}{(r_3^2-r_4^2)(r_3^2-r_2^2)(r_3^2-r_1^2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{y_{-2}+y_{+2}}{(r_2^2-r_4^2)(r_2^2-r_3^2)(r_2^2-r_1^2)}+\frac{y_{-1}+y_{+1}}{(r_1^2-r_4^2)(r_1^2-r_3^2)(r_1^2-r_2^2)}\right\}.$$

Pour $m=4$ on aura:

corr: = le produit de

$$(-1)^m\frac{H}{2}\left\{r_4^2r_3^2r_2^2r_1^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2(r_4^2r_3^2r_2^2+r_4^2r_3^2r_1^2+\right.$$
$$+r_4^2r_2^2r_1^2+r_3^2r_2^2r_1^2)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4(r_4^2r_3^2+r_4^2r_2^2+r_4^2r_1^2+$$
$$+r_3^2r_2^2+r_3^2r_1^2+r_2^2r_1^2)-$$
$$\left.-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^6(r_4^2+r_3^2+r_2^2+r_1^2)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}$$

et

$$\left\{\frac{y_{-5}+y_{+5}}{(r_5^2-r_4^2)(r_5^2-r_3^2)(r_5^2-r_2^2)(r_5^2-r_1^2)}+\right.$$
$$+\frac{y_{-4}+y_{+4}}{(r_4^2-r_5^2)(r_4^2-r_3^2)(r_4^2-r_2^2)(r_4^2-r_1^2)}+$$
$$+\frac{y_{-3}+y_{+3}}{(r_3^2-r_5^2)(r_3^2-r_4^2)(r_3^2-r_2^2)(r_3^2-r_1^2)}+$$
$$+\frac{y_{-2}+y_{+2}}{(x_2^2-x_5^2)(x_2^2-x_4^2)(x_2^2-x_3^2)(x_2^2-x_1^2)}+$$
$$\left.+\frac{y_{-1}+y_{+1}}{(x_1^2-x_5^2)(x_1^2-x_4^2)(x_1^2-x_3^2)(x_1^2-x_2^2)}\right\}.$$

Il est facile maintenant de trouver directement les expressions des corrections pour des valeurs plus élevées que $m=4$.

Il y a lieu d'observer encore que, d'après l'étude que nous venons de faire, on obtient pour I_1 et B_p les mêmes expressions que celles trouvées déjà sub (21) et (27).

§ 66. En calculant l'aire approximative de la figure et le terme auxiliaire qui y appartient d'après la méthode de Stirling, la base $A'B'$ est divisée en un nombre pair $2(m-1)$ de parties égales $=\frac{H}{2(m-1)}=h$, les abscisses $-x_1$ et $+x_1$ sont égales à zéro, de manière que les deux ordonnées du milieu tombent l'une sur l'autre dans l'axe Y, de sorte qu'elles ne forment qu'une seule ordonnée à mesurer; les ordonnées y_{-m} et y_{+m} se trouvent respectivement dans $A'A$ et $B'B$ et les ordonnées auxiliaires $y_{-(m+1)}$ et $y_{+(m+1)}$ sont éloignées de l'axe Y à la distance de $\left(\frac{1}{2}H+h\right)$.

Prenons, comme exemple de la manière suivie par Stirling pour calculer le terme auxiliaire, le cas de $m=2$; ainsi $n=2m-1=3$, on a alors $r_1=0$, $r_2=\frac{1}{2}$ et $r_3=1$, par conséquent

$$\text{corr:}=\frac{H}{2}\left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\left\{\frac{y_{-3}+y_{+3}}{1-\frac{3}{4}}+\right.$$
$$\left.+\frac{y_{-2}+y_{+2}}{\left(\frac{1}{4}-1\right)\frac{1}{4}}+\frac{y_{-1}+y_{+1}}{-1\,.\,\frac{1}{4}}\right\},$$

et l'on trouve

$$\text{corr:} = -\frac{H}{180}\left\{6\,y_1 - 4\,(y_{-2} + y_{+2}) + (y_{-3} + y_{+3})\right\}.$$

Les termes auxiliaires, suivant Stirling, pour $m = 2, 3, 4$ et 5 figurent dans la table J, qui se trouve ci-après. En comparant les termes de la table J et ceux donnés par Stirling, on trouve que, pour rendre l'application plus facile, Stirling a remplacé les coefficients

$$\frac{2}{945} = \frac{1}{472{,}5},\ \frac{729}{680400} = \frac{1}{933{,}3} \text{ et } \frac{296}{467775} = \frac{1}{1580{,}3}$$

par $\frac{1}{470}, \frac{1}{930}$ et $\frac{1}{1600}$.

Formules d' **Euler.**

§ 67. Posons d'abord, fig. 1, $A'B' = H$; divisons cette ligne en $(n-1)$ parties égales $= h$, et élevons sur les points de division et les points extrêmes A' et B' les ordonnées y_1, $y_2, \ldots y_n$, que nous supposons connues. Ainsi, par ces n ordonnées, la figure est partagée en $(n-1)$ bandes de même largeur.

Soient les distances de l'axe $Y'O'$ à la première et à la dernière ordonnée de la figure respectivement égales à a et b.

Nous adoptons la distance de l'ordonnée y_1 à l'ordonnée variable y comme la variable indépendante x, et représentons l'équation de la courbe AB, rapportée aux axes des coordonnées perpendiculaires entre eux $O'X$ et $O'Y'$, fig. 1, par

$$y = f(a + x).$$

Déterminons premièrement l'aire $i'_1 = \int_0^h y\,dx = \int_0^h f(a+x)\,dx$ de la première bande, c'est à dire de la bande qui se trouve entre les ordonnées y_1 et y_2; puis l'aire i'_2 de la deuxième bande, et ainsi de suite, pour en déduire, par l'addition de toutes les bandes, l'aire I' de la figure entière.

Si nous posons, conformément aux indications de la figure, $x = h - z$, il résulte

$$f(a + x) = f(a + h - z) \text{ et } dx = -dz.$$

On a, pour $x = o : z = h$ et pour $z = h : z = o$, donc

$$i'_1 = \int_{x=o}^{x=h} f(a+x)\,dx = \int_{z=h}^{z=o} f(a+h-z).-dz =$$

$$= \int_{z=o}^{z=h} f(a+h-z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

La série de Taylor est

$$f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1} f_1(a) + \frac{x^2}{1.2} f_2(a) + \frac{x^3}{1.2.3} f_3(a) + \ldots (103)$$

et aussi

$$f(a+h-z) = f(a+h) - \frac{z}{1} f_1(a+h) + \frac{z^2}{1.2} f_2(a+h) -$$

$$- \frac{z^3}{1.2.3} f_3(a+h) + \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

En multipliant (103) par dx et (104) par dz et en intégrant, la formule sub (102) donne

$$i'_1 = \frac{h}{1} f(a) + \frac{h^2}{1.2} f_1(a) + \frac{h^3}{1.2.3} f_2(a) + \frac{h^4}{1.2.3.4} f_3(a) + \ldots$$

et

$$i'_1 = \frac{h}{1} f(a+h) - \frac{h^2}{1.2} f_1(a+h) + \frac{h^3}{1.2.3} f_2(a+h) -$$

$$- \frac{h^4}{1.2.3.4} f_3(a+h) + \ldots .$$

et en additionnant les deux dernières égalités, on a

$$2i'_1 = \frac{h}{1} \left\{ f(a+h) + f(a) \right\} + \frac{h^3}{1.2.3} \left\{ f_2(a+h) + f_2(a) \right\} +$$

$$+ \frac{h^5}{1.2.3.4.5} \left\{ f_4(a+h) + f_4(a) \right\} + \ldots .$$

$$\ldots - \frac{h^2}{1.2} \left\{ f_1(a+h) - f_1(a) \right\} - \frac{h^4}{1.2.3.4} \left\{ f_3(a+h) - f_3(a) \right\} - .(105)$$

§ 68. Si l'on détermine de la même manière l'aire des bandes suivantes, on trouve, en additionnant:

$$I' = \frac{1}{2}(2i'_1 + 2i'_2 + 2i'_3 + \ldots + 2i'_{n-1}) =$$

$$h\{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,h)\} -$$

$$-\frac{1}{2}h\left\{f(a) + f(a+\overline{n-1}\,h)\right\} + \frac{1}{4}h^2\left\{f_1(a) - f_1(a+\overline{n-1}\,h)\right\} +$$

$$+\frac{1}{6}h^3\left\{f_2(a) + f_2(a+h) + f_2(a+2h) + \ldots + f_2(a+\overline{n-1}\,h)\right\} -$$

$$-\frac{1}{12}h^3\left\{f_2(a) + f_2(a+\overline{n-1}\,h)\right\} + \frac{1}{48}h^4\left\{f_3(a) - f_3(a+\overline{n-1}\,h)\right\} +$$

$$+\frac{1}{120}h^5\left\{f_4(a) + f_4(a+h) + f_4(a+2h) + \ldots + f_4(a+\overline{n-1}\,h)\right\} -$$

$$-\frac{1}{240}h^5\left\{f_4(a) + f_4(a+\overline{n-1}\,h)\right\} + \frac{1}{1440}h^6\left\{f_5(a) - f_5(a+\overline{n-1}\,h)\right\} +$$

$$+ \text{etc.}$$

Quand on pose $h = \alpha$, $H = 1$ et

$f(a) = A$, $f(a+h) = A'$, $f(a+2h) = A''$, $\ldots f(a+\overline{n-1}\,h) = X$,
$f_1(a) = B$ et $f_1(a+\overline{n-1}\,h) = P$;
$f_2(a) = C$, $f_2(a+h) = C'$, $f_2(a+2h) = C''$, $\ldots f_2(a+\overline{n-1}\,h) = Q$,
$f_3(a) = D$ et $f_3(a+\overline{n-1}\,h) = R$;
$f_4(a) = E$, $f_4(a+h) = E'$, $f_4(a+2h) = E''$, $\ldots f_4(a+\overline{n-1}\,h) = S$,
$f_5(a) = F$ et $f_5(a+\overline{n-1}\,h) = T$;

l'expression pour I' devient

$$\begin{aligned} I' = \quad & \alpha\,(A + A' + A'' + \ldots + X) - \frac{1}{2}\,\alpha\,(A + X) + \\ & + \frac{1}{4}\,\alpha^2(B - P) + \\ + \; & \frac{1}{6}\alpha^3(C + C' + C'' + \ldots + Q) - \frac{1}{12}\,\alpha^3(C + Q) + \\ & + \frac{1}{48}\,\alpha^4(D - R) + \\ + \; & \frac{1}{120}\alpha^5(E + E' + E'' + \ldots + S) - \frac{1}{240}\alpha^5(E + S) + \\ & + \frac{1}{1440}\alpha^6(F - T) + . \end{aligned} \quad (106)$$

Ceci est une formule d'Euler, dans la forme où la donne ce célèbre mathématicien.

§ 69. L'expression pour i'_1 sub (105) peut être simplifiée de la manière suivante:

Si nous posons en (103) $x = h$ et en (104) $z = h$, nous trouvons

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f_1(a)+\frac{h^2}{1.2}f_2(a)+\frac{h_3}{1.2.3}f_3(a)+\ldots(107)$$

et

$$f(a)=f(a+h)-\frac{h}{1}f_1(a+h)+\frac{h^2}{1.2}f_2(a+h)-$$
$$-\frac{h^3}{1.2.3}f_3(a+h)+\ldots(108)$$

et en additionnant (107) et (108):

$$\frac{h}{1}\left\{f_1(a+h)-f_1(a)\right\}+\frac{h^3}{1.2.3}\left\{f_3(a+h)-f_3(a)\right\}+$$
$$+\frac{h^5}{1.2.3.4.5}\left\{f_5(a+h)-f_5(a)\right\}+\ldots=$$
$$=\frac{h^2}{1.2}\left\{f_2(a+h)+f_2(a)\right\}+\frac{h^4}{1.2.3.4}\left\{f_4(a+h)+(f_4(a)\right\}+\ldots(109)$$

Pour abréger, représentons

$f_p(a+h)+f_p(a)$ par P_p et $f_p(a+h)-f_p(a)$ par Q_p alors (105) et (109) deviennent

$$2i'_1=\frac{h}{1}P_0+\frac{h^3}{1.2.3}P_2+\frac{h^5}{1.2.3.4.5}P_4+\ldots.$$
$$\ldots.-\frac{h^2}{1.2}Q_1-\frac{h^4}{1.2.3.4}Q_3-\frac{h^6}{1.2.3.4.5.6}Q_5-\ldots(110)$$

et

$$\frac{h}{1}Q_1+\frac{h^3}{1.2.3}Q_3+\frac{h^5}{1.2.3.4.5}Q_5+\ldots=$$
$$=\frac{h^2}{1.2}P_2+\frac{h^4}{1.2.3.4}P_4+\frac{h^6}{1.2.3.4.5.6}P_6+\ldots(111)$$

En substituant la valeur de P_2 de (111) dans l'équation (110), celle-ci devient

$$2 i'_1 = \frac{h}{1} P_0 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) \frac{h^5}{1.2.3.4} P_4 +$$
$$+ \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) \frac{h^7}{1.2.3.4.5.6} P_6 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \frac{h^2}{1} Q_1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \frac{h^4}{1.2.3} Q_3 +$$
$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \frac{h^6}{1.2.3.4.5} Q_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on applique l'opération qui conduisait à (111), aux $p^{\text{ièmes}}$ dérivées de (107) et (108) au lieu de l'appliquer à ces fonctions elles-mêmes, il résulte

$$\frac{h}{1} Q_p + \frac{h^3}{1.2.3} Q_{p+2} + \frac{h^5}{1.2.3.4.5} Q_{p+4} + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{h^2}{1.2} P_{p+1} + \frac{h^4}{1.2.3.4} P_{p+3} + \frac{h^6}{1.2.3.4.5.6} P_{p+5} + \ldots \quad (112)$$

ce qui prouve qu'en (111) on peut de part et d'autre augmenter les indices arbitrairement, pourvu que les indices de P soient augmentés autant que ceux de Q.

Quand on augmente de 2 tous les indices en (111), on ramène l'égalité à celle-ci

$$\frac{h}{1} Q_3 + \frac{h^3}{1.2.3} Q_5 + \frac{h^5}{1.2.3.4.5} Q_7 + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{h^2}{1.2} P_4 + \frac{h^4}{1.2.3.4} P_6 + \frac{h^6}{1.2.3.4.5.6} P_8 + \ldots\ldots;$$

ce qui fournit le moyen d'éliminer P_4.

On voit, en éliminant P_{p+1} d'après (112) que la grandeur Q_p se présente encore, mais non plus une grandeur Q ayant un indice inférieur à p, de sorte que, à chaque élimination, un coefficient numérique d'un Q reste constant dans la suite.

Si l'on pousse assez loin l'élimination des termes P_{p+1}, on trouve pour l'aire de la première bande:

$$i'_1 = \frac{h}{2} \left\{ f(a+h) + f(a) \right\} + \alpha_2 h^2 \left\{ f_1(a+h) - f_1(a) \right\} +$$
$$+ \alpha_4 h^4 \{ f_3(a+h) - f_3(a) \} + \text{etc.}$$

ou

$$i'_1 = \frac{h}{2} P_0 + \alpha_2 h^2 Q_1 + \alpha_4 h^4 Q_3 + \alpha_6 h^6 Q_5 + \alpha_8 h^8 Q_7 +$$
$$+ \alpha_{10} h^{10} Q_9 + \alpha_{12} h^{12} Q_{11} + \alpha_{14} h^{14} Q_{13} + \text{etc.} \ldots (113)$$

P_0 étant égal à $f(a+h)+f(a)$; $Q_p = f_p(a+h) - f_p(a)$;

$$\alpha_2 = -\frac{1}{12}; \ \alpha_4 = \frac{1}{720}; \ \alpha_6 = -\frac{1}{3\ 0240}; \ \alpha_8 = \frac{1}{120\ 9600};$$
$$\alpha_{10} = -\frac{1}{4790\ 0160}; \ \alpha_{12} = \frac{691}{1\ 3076\ 7436\ 8000};$$
$$\alpha_{14} = -\frac{1}{747\ 2424\ 9600}; \text{ etc.}$$

Nous trouvons d'après (113) pour les aires des bandes suivantes:

$$i'_2 = \frac{h}{2}\Big\{f(a+2h)+f(a+h)\Big\} + \alpha_2 h^2 \Big\{f_1(a+2h) - f_1(a+h)\Big\} +$$
$$+ \alpha_4 h^4 \{f_3(a+2h) - f_3(a+h)\} + \text{etc.}$$
$$i'_3 = \frac{h}{2}\Big\{f(a+3h)+f(a+2h)\Big\} + \alpha_2 h^2 \Big\{f_1(a+3h) - f_1(a+2h)\Big\} +$$
$$+ \alpha_4 h^4 \{f_3(a+3h) - f_3(a+2h)\} + \text{etc.};$$

. . . .

$$i'_{n-1} = \frac{h}{2}\Big\{f(a+\overline{n-1}\,h) + f(a+\overline{n-2}\,h)\Big\} +$$
$$+ \alpha_2 h^2 \{f_1(a+\overline{n-1}\,h) - f_1(a+\overline{n-2}\,h)\} +$$
$$+ \alpha_4 h^4 \{f_3(a+\overline{n-1}\,h) - f_3(a+\overline{n-2}\,h)\} + \text{etc.},$$

et en additionnant

$$I' = \frac{h}{2}\Big\{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots +$$
$$+ 2f(a+\overline{n-2}\,h) + f(a+\overline{n-1}\,h)\Big\} +$$
$$+ \alpha_2 h^2 \{f_1(a+\overline{n-1}\,h) - f_1(a)\} +$$
$$+ \alpha_4 h^4 \{f_3(a+\overline{n-1}\,h) - f_3(a)\} +$$
$$+ \alpha_6 h^6 \{f_5(a+\overline{n-1}\,h) - f_5(a)\} +$$
$$+ \alpha_8 h^8 \{f_7(a+\overline{n-1}\,h) - f_7(a)\} + \text{etc.};$$

ou parce que

$(n-1)h = H;\quad h = \frac{H}{n-1};\quad f(a) = y_1;\quad f(a+h) = y_2;$

$f(a+2h) = y_3;\ \ldots\ f(a+\overline{n-1}\,h) = y_n$ et $a + \overline{n-1}\,h = b$;
et en posant F_p pour $\{f_p(b) - f_p(a)\}$, on a

$$I = H.\frac{y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n}{2(n-1)} + \alpha_2\left(\frac{H}{n-1}\right)^2 F_1 + \\ + \alpha_4\left(\frac{H}{n-1}\right)^4 F_3 + \alpha_6\left(\frac{H}{n-1}\right)^6 F_5 + \alpha_8\left(\frac{H}{n-1}\right)^8 F_7 + \\ + \alpha_{10}\left(\frac{H}{n-1}\right)^{10} F_9 + \alpha_{12}\left(\frac{H}{n-1}\right)^{12} F_{11} + \alpha_{14}\left(\frac{H}{n-1}\right)^{14} F_{13} + \ldots (114)$$

Ceci est de même une formule d'approximation d'Euler. Elle suppose que toutes les bandes, dans lesquelles la figure est divisée, ont la même largeur et que les ordonnées extrêmes de chacune de ces bandes sont connues.

Méthode des **trapèzes.**

§ 70. En (114) la correction est exprimée en fonction des quotients différentiels d'ordre impair, à commencer par le premier. (Voyez le § 32).

Si l'on supprime en (114) les termes de correction, on retrouve pour l'aire approximative de la figure la formule sub (1).

Première *formule de* **MacLaurin.**

§ 71. MacLaurin a dérivé de la formule d'Euler sub (114) deux autres formules (nommées la première et la seconde formule de MacLaurin) dans lesquelles, pour un même nombre de n, la valeur de corr: est plus petite que celle de la formule sub (114).

MacLaurin ne met d'abord en compte que les deux ordonnées extrêmes de la figure, c'est à dire qu'il représente la figure comme une seule bande, et trouve d'après (114), puisqu'alors $n = 2$:

$$I' = H.\frac{y_1 + y_n}{2} + \alpha_2 H^2 F_1 + \alpha_4 H^4 F_3 + \alpha_6 H^6 F_5 + \alpha_8 H^8 F_7 + \\ + \alpha_{10} H^{10} F_9 + \alpha_{12} H^{12} F_{11} + \alpha_{14} H^{14} F_{13} + . (115)$$

Il soustrait cette égalité de $(n-1)^2$ fois (114) et obtient alors

$$I' = \frac{H}{2n(n-2)}\Big\{(n-2)(y_1+y_n)+2(n-1)(y_2+y_3+y_4+\ldots+y_{n-1})\Big\} -$$
$$- \frac{1}{(n-1)^2}\alpha_4 H^4 F_3 - \frac{(n-1)^2+1}{(n-1)^4}\alpha_6 H^6 F_5 -$$
$$- \frac{(n-1)^4+(n-1)^2+1}{(n-1)^6}\alpha_8 H^8 F_7 -$$
$$- \frac{(n-1)^6+(n-1)^4+(n-1)^2+1}{(n-1)^8}\alpha_{10} H^{10} F_9 - \text{etc.} \ldots (116)$$

On voit que cette formule, nommée la première formule de MacLaurin, ne contient pas le terme de correction qui est affecté de α_2; il en résulte qu'en supprimant tous les termes de correction, aussi bien en (114) qu'en (116), la formule qui reste de (116) est plus exacte que celle qui reste de (114). {Voyez la formule sub (5)}.

Formule de **Simpson.**

§ 72. Si l'on pose en (116) $n=3$ et la distance de deux ordonnées à mesurer qui se suivent immédiatement $=h$, on trouve

$$I' = \frac{h}{3}\Big\{y_1 + 4y_2 + y_3\Big\} - 4\alpha_4 h^4 \Big\{f_3(a+2h) - f_3(a)\Big\} -$$
$$-20\alpha_6 h^6\{f_5(a+2h)-f_5(a)\} - 84\alpha_8 h^8\{f_7(a+2h)-f_7(a)\} - .(117)$$

En divisant la base $A'B'$ de la figure, comme dans le § 4, en $2m$ parties égales $=h$, ainsi la figure en $2m$ bandes et en représentant les aires des bandes successivement par i''_1, $i''_2, \ldots i''_{n-1}$, on a d'après (117):

$$i''_1 + i''_2 = \frac{h}{3}\Big\{y_1 + 4y_2 + y_3\Big\} - 4\alpha_4 h^4\Big\{f_3(a+2h) - f_3(a)\Big\} -$$
$$- 20\alpha_6 h^6\{f_5(a+2h) - f_5(a)\} - \ldots\ldots,$$
$$i''_3 + i''_4 = \frac{h}{3}\Big\{y_3 + 4y_4 + y_5\Big\} - 4\alpha_4 h^4\Big\{f_3(a+4h) - f_3(a+2h)\Big\} -$$
$$- 20\alpha_6 h^6\{f_5(a+4h) - f_5(a+2h)\} - \ldots\ldots,$$

. . . .

. . . .

$$i'_{2m-1} + i'_{2m} = \frac{h}{3}\left\{y_{2m-1} + 4\,y_{2m} + y_{2m+1}\right\} -$$
$$- 4\,\alpha_4\,h^4\,\{f_3\,(a + 2\,m\,.\,h) - f_3\,(a + \overline{2m-2}\,h)\} -$$
$$- 20\,\alpha_6\,h^6\,\{f_5\,(a + 2\,m\,.\,h) - f_5\,(a + \overline{2m-2}\,h)\} - \ldots .$$

d'où l'on trouve

$$I' = \frac{h}{3}\Big\{(y_1 + y_{2m+1}) + 2\,(y_3 + y_5 + \cdots + y_{2m-1}) +$$
$$+ 4\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m})\Big\} - \frac{4}{(2m)^4}\,\alpha_4\,H^4\,F_3 -$$
$$- \frac{20}{(2m)^6}\,\alpha_6\,H^6\,F_5 - \ldots . \quad (118)$$

Si en (118) on supprime les termes de correction, il reste la formule d'approximation de Simpson sub (2). {Voyez la formule à la fin du § 8}.

Formule de **Newton.**

§ 73. Pour quatre ordonnées à mesurer, on trouve, en posant en (116) $n = 4$,

$$I' = \frac{H}{8}\left\{y_1 + 3\,y_2 + 3\,y_3 + y_4\right\} - \frac{1}{9}\,\alpha_4\,H^4\,F_3 - \frac{10}{81}\,\alpha_6\,H^6\,F_5 -$$
$$- \frac{91}{729}\,\alpha_8\,H^8\,F_7 - \ldots . \quad (119)$$

En supprimant les termes de correction, il reste la formule d'approximation à laquelle on a donné le nom de formule de Newton.

Formule de **Cotes.**

§ 74. Cinq ordonnées à mesurer donnent lieu au développement suivant:

Il résulte de (118) que si l'on ne met en compte que les deux ordonnées extrêmes y_1 et y_5 avec l'ordonnée du milieu y_3, puisqu'alors dans (118) h est égal à $\frac{1}{2}\,H$ et $m = 1$:

$$I' = \frac{H}{30}\left\{5y_1 + 20y_3 + 5y_5\right\} - \frac{1}{4}\alpha_4 H^4 F_3 - \frac{5}{16}\alpha_6 H^6 F_5 -$$
$$- \frac{21}{64}\alpha_8 H^8 F_7 - \frac{85}{256}\alpha_{10} H^{10} F_9 - \ldots \quad (120)$$

Si cependant on met en compte les cinq ordonnées, (116) donne pour $n = 5$, après avoir multiplié les deux membres de l'équation par 4:

$$4\,I' = \frac{H}{30}\left\{12y_1 + 32y_2 + 32y_3 + 32y_4 + 12y_5\right\} -$$
$$- \frac{1}{4}\alpha_4 H^4 F_3 - \frac{17}{64}\alpha_6 H^6 F_5 - \frac{273}{1024}\alpha_8 H^8 F_7 -$$
$$- \frac{4369}{16384}\alpha_{10} H^{10} F_9 - \ldots \quad (121)$$

Si l'on retranche membre à membre les équations (120) et (121), le terme avec α_4 s'évanouit et l'on obtient après division par 3, l'équation

$$I' = \frac{H}{90}\left\{7(y_1 + y_5) + 32(y_2 + y_4) + 12y_3\right\} + \frac{1}{64}\alpha_6 H^6 F_5 +$$
$$+ \frac{21}{1024}\alpha_8 H^8 F_7 + \frac{357}{16384}\alpha_{10} H^{10} F_9 + \frac{5797}{262144}\alpha_{12} H^{12} F_{11} + . \quad (122)$$

dont la première partie du second membre est connue sous le nom de formule d'approximation de Cotes. {Voyez la formule sub (11)}.

Quand on substitue en (122) les valeurs de α_6, α_8, α_{10} et α_{12}, on trouve dans l'expression pour la correction les mêmes coefficients que ceux dans la formule sub (46).

§ 75. Le cas où l'aire de la figure doit être exprimée en six ordonnées à mesurer exige déjà un calcul assez étendu. Voici un développement de la formule:

1°. En appliquant la formule (116) pour $n = 6$, on trouve

$$I' = \frac{h}{48}\left\{20(y_1 + y_6) + 50(y_2 + y_5) + 50(y_3 + y_4)\right\} -$$
$$- 25\alpha_4 h^4 \{f_3(a + 5h) - f_3(a)\} -$$
$$- 650\alpha_6 h^6 \{f_5(a + 5h) - f_5(a)\} - \ldots$$

2°. Si l'on applique la formule (122) aux quatre premières, ensuite aux quatre dernières bandes, et puis la formule (119) aux trois bandes du milieu, on trouve

$$I' = \frac{h}{360}\left\{112(y_1+y_6)+489(y_2+y_5)+299(y_3+y_4)\right\}+$$
$$+9\,\alpha_4 h^4\{f_3(a+4h)-f_3(a+h)\}+64\,\alpha_6 h^6\{f_5(a+4h)-$$
$$-f_5(a)\}+154\,\alpha_6 h^6\{f_5(a+4h)-f_5(a+h)\}+\ldots\ldots\ldots$$

3°. L'application des formules sub (117), (119) et (122) donne

$$2I' = \frac{h}{360}\left\{247(y_1+y_6)+909(y_2+y_5)+644(y_3+y_4)\right\}-$$
$$-9\alpha_4 h^4\{f_3(a+5h)-f_3(a)\}+4\alpha_4 h^4\{f_3(a+4h)-f_3(a+h)\}-$$
$$-5\,\alpha_4 h^4\{f_3(a+3h)-f_3(a+2h)\}-$$
$$-26\,\alpha_4 h^6\{f_5(a+5h)-f_5(a)\}+$$
$$+84\,\alpha_6 h^6\{f_5(a+4h)-f_5(a+h)\}-$$
$$-70\,\alpha_6 h^6\{f_5(a+3h)-f_5(a+2h)\}+\ldots$$

4°. En additionnant les aires des bandes de la manière suivante:

$$\{(i'_1+i'_2+i'_3)+(i'_4+i'_5)\}+\{i'_1+i'_2)+(i'_3+i'_4+i'_5)\},$$

on trouve

$$2I' = \frac{h}{360}\left\{255(y_1+y_6)+885(y_2+y_5)+660(y_3+y_4)\right\}-$$
$$-13\,\alpha_4 h^4\{f_3(a+5h)-f_3(a)\}-$$
$$-5\,\alpha_4 h^4\{f_3(a+3h)-f_3(a+2h)\}-$$
$$-110\,\alpha_6 h^6\{f_5(a+5h)-f_5(a)\}-$$
$$-70\,\alpha_6 h^6\{f_5(a+3h)-f_5(a+2h)\}-\ldots\ldots$$

Quant aux équations sub 1°. ÷ 4°., les trois termes de correction avec α_4 en peuvent être écartés, de sorte qu'il reste

$$I' = \frac{H}{288}\left\{19(y_1+y_6)+75(y_2+y_5)+50(y_3+y_4)\right\}+$$
$$+\frac{\alpha_6 H^6}{1\;0000}\Big[109\left\{f_5(a+5h)-f_5(a)\right\}-$$
$$-35\left\{f_5(a+4h)-f_5(a+h)\right\}\Big]-\ldots.$$

On trouve ensuite d'après

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots\ldots :$$

$$f_5(a+4h) - f_5(a+h) = 2.3.4.5.6 A_6 (3h) + \\ + 3.4.5.6.7 A_7 (6h + 15h^2) + \ldots$$

et

$$f_5(a+5h) - f_5(a) = 2.3.4.5.6 A_6 (5h) + \\ + 3.4.5.6.7 A_7 (10h + 25h^2) + \ldots$$

par conséquent

$$35\{f_5(a+4h) - f_5(a+h)\} = 21\{f_5(a+5h) - f_5(a)\}$$

donc

$$I' = \frac{H}{288}\left\{19(y_1+y_6) + 75(y_2+y_5) + 50(y_3+y_4)\right\} + \\ + \frac{11\alpha_6}{1250} H^6 \left\{f_5(b) - f_5(a)\right\} + \ldots$$

§ 76. Quand on suppose qu'il y a sept ordonnées connues, on trouve dans les formules (116), (117) et (119) trois équations d'où les termes avec α_4 et α_6 peuvent être écartés, de sorte qu'il reste

$$I' = \frac{H}{840}\left\{41(y_1+y_7) + 216(y_2+y_6) + 27(y_3+y_5) + 272 y_4\right\} - \\ - \frac{\alpha_8}{1296} H^8 \left\{f_7(b) - f_7(a)\right\} - \ldots$$

§ 77. En continuant ainsi on pourrait trouver toutes les formules de la table A; mais les calculs se compliquent de plus en plus pour des valeurs plus grandes que $n = 7$. Cette question peut être traitée d'une manière plus rapide en appliquant la méthode développée dans le § 32.

Formules dont les termes de correction peuvent être calculés plus facilement que ceux qui appartiennent aux formules de **Newton-Cotes, MacLaurin** *et* **Gauss.**

§ 78. Les formules développées dans ce chapitre donnent lieu à d'autres formules qui, lorsqu'on se sert de termes de correction, conduisent plus facilement au but et qui donnent en même temps un résultat un peu plus exact.

En additionnant, par exemple, (115) au quadruple de (117), on trouve

$$I = \frac{H}{30}\left\{7(y_1+y_3)+16y_2\right\} + \frac{1}{5}\alpha_2 H^2 F_1 - \frac{1}{20}\alpha_6 H^6 F_5 - $$
$$- \frac{1}{16}\alpha_8 H^8 F_7 - \ldots \quad (123)$$

Soit qu'on se serve d'un terme seulement, soit de deux ou de plus de deux termes de correction, la formule (123) est plus exacte et plus facile dans le calcul que celle sub (120).

Si l'on applique la formule sub (123) à l'approximation de l'intégrale du § 22, on a, en traçant l'axe Y au milieu de la base de la figure:

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 0 \text{ et } x_3 = \frac{1}{2}, \text{donc } y_1 = \frac{1}{8},\ y_2 = \frac{2}{17} \text{ et } y_3 = \frac{1}{9};$$

ensuite

$$F_1 = f_1(b) - f_1(a) = -\left(\frac{1}{8\frac{1}{2}+b}\right)^2 + \left(\frac{1}{8\frac{1}{2}+a}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{17}{5184};\ H = 1 \text{ et } \alpha_2 = -\frac{1}{2};$$

par conséquent

$$I = \frac{1}{30}\left\{7(y_1+y_3)+16y_2\right\} = \quad 0{,}1178\ 3769\ 0632\ldots$$
$$+\frac{1}{5}\alpha_2 F_1 = \quad -0{,}0000\ 5465\ 5350\ldots$$

donc $I =$ **0,1177 8303** 5282...

On a trouvé dans le § 33: $I =$ 0,1177 8303 5936...

0,2355 6607 1218...

la moyenne est $I =$ 0,1177 8303 5609...

La valeur exacte de l'intégrale est = 0,1177 8303 5656...

§ 79. En multipliant (122) par 64 et (117) par $\frac{16}{5}$ on trouve

$$I = \frac{H}{378}\left\{31(y_1+y_5)+128(y_2+y_4)+60y_3\right\} - \frac{1}{84}\alpha_4 H^4 F_3 +$$
$$+ \frac{1}{256}\alpha_8 H^8 F_7 + \ldots \quad (124)$$

La somme des produits de 16 fois (117) et 5 fois (115) donne

$$I' = \frac{H}{126}\left\{31\,(y_1 + y_3) + 64\,y_2\right\} + \frac{5}{21}\,\alpha_2\,H^2\,F_1 + \frac{1}{21}\,\alpha_4\,H^4\,F_3 -$$

$$- \frac{1}{84}\,\alpha_8\,H^8\,F_7 - \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

et en additionnant le quadruple de (124) à (125) on trouve

$$I' = \frac{H}{1890}\left\{217\,(y_1 + y_5) + 512\,(y_2 + y_4) + 432\,y_3\right\} +$$

$$+ \frac{1}{21}\,\alpha_2\,H^2\,F_1 + \frac{1}{1344}\,\alpha_8\,H^8\,F_7 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Etc.

Au reste, dans chaque cas particulier, on devra examiner quelle formule ou quelle combinaison de formules mérite la préférence pour le but qu'on a en vue.

Seconde *formule de* MacLaurin.

§ 80. Au moyen de (114) nous exprimons l'aire de la première bande de la figure de deux manières.

Soient, de cette bande: l'aire $= i_1$; la largeur $= h$; les ordonnées extrêmes $= y_1$ et y_2, et l'ordonnée médiane $= y'_1$, alors (114) donne pour $n = 3$:

$$i'_1 = \frac{h}{4}(y_1 + 2y'_1 + y_2) + \frac{\alpha_2}{4}\,h^2\left\{f_1\,(a+h) - f_1\,(a)\right\} +$$

$$+ \frac{\alpha_4}{16}h^4\left\{f_3\,(a+h) - f_3\,(a)\right\} - \frac{\alpha_4}{64}\,h^6\left\{f_5\,(a+h) - f_5\,(a)\right\} + .\,(126)$$

tandis que (115) donne

$$i''_1 = \frac{h}{2}\,(y_1 + y_2) + \alpha\,h^2\,\{f_1\,(a+h) - f_1\,(a)\} +$$

$$+ \alpha_4\,h^4\,\{f_3\,(a+h) - f_3\,(a)\} + \alpha_6\,h^6\,\{f_5\,(a+h) - f_5\,(a)\} + ..\,(127)$$

En soustrayant (127) du double de (126) on a

$$i'_1 = h\,y'_1 - \frac{1}{2}\,\alpha_2\,h^2\left\{f_1\,(a+h) - f_1\,(a)\right\} -$$

$$- \frac{7}{8}\alpha_4\,h^4\left\{f_3(a+h) - f_3\,(a)\right\} - \frac{31}{32}\alpha_6\,h^6\left\{f_5(a+h) - f_5(a)\right\} - .\,(128)$$

Dans la formule (128), les ordonnées extrêmes y_1 et y_2 ne se trouvent plus; on y rencontre seulement l'ordonnée médiane, ainsi, celle-ci est la seule qu'on doit connaître. Par conséquent si on suppose que la figure est partagée en $(n-1)$ bandes de même largeur, dont on connaît la longueur des ordonnées du milieu $y'_1, y'_2, \ldots y'_{n-1}$, on peut alors appliquer à chaque bande la formule sub (128). Ainsi on trouve:

$$i'_2 = h y'_2 - \frac{1}{2} \alpha_2 h^2 \left\{ f_1(a+2h) - f_1(a+h) \right\} - $$
$$- \frac{7}{8} \alpha_4 h^4 \left\{ f_3(a+2h) - f_3(a+h) \right\} - \ldots$$

$$i'_3 = h y'_3 - \frac{1}{2} \alpha_2 h^2 \left\{ f_1(a+3h) - f_1(a+2h) \right\} - $$
$$- \frac{7}{8} \alpha_4 h^4 \left\{ f_3(a+3h) - f_3(a+2h) \right\} - \ldots$$

. . . .

$$i'_{n-1} = h y'_{n-1} - \frac{1}{2} \alpha_2 h^2 \left\{ f_1(a+\overline{n-1}\,h) - f_1(a+\overline{n-2}\,h) \right\} - $$
$$- \frac{7}{8} \alpha_4 h^4 \left\{ f_3(a+\overline{n-1}\,h) - f_3(a+\overline{n-2}\,h) \right\} - \ldots$$

et puisque $(n-1)\,h = H$ et $h = \frac{H}{n-1}$,

$$I' = H . \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \ldots + y'_{n-1}}{n-1} - \frac{1}{2} \alpha_2 \left(\frac{H}{n-1}\right)^2 F_1 - $$
$$- \frac{7}{8} \alpha_4 \left(\frac{H}{n-1}\right)^4 F_3 - \frac{31}{32} \alpha_6 \left(\frac{H}{n-1}\right)^6 F_5 - \ldots \quad (129)$$

Cette formule s'appelle la seconde formule de MacLaurin.

En supprimant en (129) les termes de correction, il reste la formule d'approximation

$$I = H . \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \ldots + y'_{n-2} + y'_{n-1}}{n-1},$$

qui exige une ordonnée de moins que la formule sub (1); cependant elle est plus exacte et aussi plus simple dans l'application.

§ 81. Si l'on ne mesure qu'une ordonnée, alors on a dans la formule (129) $n = 2$ et cette formule se change en

$$I' = H y'_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 H^2 F_1 - \frac{7}{8} \alpha_4 H^4 F_3 - \frac{31}{32} \alpha_6 H^6 F_5 - \ldots\ldots$$

Pour deux ordonnées, n étant alors égal à 3, la formule devient

$$I' = \frac{H}{2} (y'_1 + y'_2) - \frac{1}{8} \alpha_2 H^2 F_1 - \frac{7}{128} \alpha_4 H^4 F_3 - \\ - \frac{31}{2048} \alpha_6 H^6 F_5 - \ldots\ldots$$

Pour trois ordonnées on trouve

$$I' = \frac{H}{8} \left\{ 3 (y'_1 + y'_3) + 2 y'_2 \right\} + \frac{7}{72} \alpha_4 H^4 F_3 + \\ + \frac{155}{1296} \alpha_6 H^6 F_5 + \ldots\ldots$$

Etc. Avec des valeurs plus grandes que $n = 6$, les calculs deviennent extrêmement compliqués.

Formule générale dont peuvent être dérivées les formules d'approximation de **Gauss** *et d'autres semblables, dont la valeur des termes de correction est un minimum.*

§ 82. Soit AB, fig. 2, une courbe arbitraire. Sur cette courbe nous prenons arbitrairement $2q$ points situés symétriquement par rapport à l'axe Y et dont nous supposons que les coordonnées sont parfaitement connues; de plus, nous prenons sur cette même courbe, arbitrairement, $4(m-q)$ d'autres points situés de même symétriquement par rapport à l'axe Y et dont les coordonnées ne sont nullement connues; par ces $2\{q + 2(m-q)\} = 2(2m-q)$ points nous traçons une ligne parabolique $y = f(x)$.

Nous démontrerons que, indépendamment du lieu des $2(m-q)$ couples de points, il est toujours possible d'indiquer sur la ligne $y = f(x)$ $(m-q)$ couples de points, situés de telle sorte que si une ligne parabolique $y' = F(x)$ est tracée par ces $(m-q)$ couples de points et les q couples de points connus, la ligne $y' = F(x)$ limite une même aire que la ligne $y = f(x)$:

Prenons, pour plus de simplicité, la base de la figure $= A'\,B' = H = 1$ et soient $(-x_p, y_{-p})$ et (x_p, y_p) les coordonnées de deux points de la ligne $y = f(x)$ qui se trouvent de part et d'autre à une distance égale mais arbitraire de l'axe Y, alors nous avons

$$y_{+p} = a_0 + a_1 x_p + a_2 x_p{}^2 + a_3 x_p{}^3 + \ldots + \\ + a_{4m-2q-2} x^{2m-2q-2} + a_{4m-2q-1} x_p{}^{4m-2q-1}$$

et

$$y_{-p} = a_0 - a_1 x_p + a_2 x_p{}^2 - a_3 x_p{}^3 + \ldots + \\ + a_{4m-2q-2} x_p{}^{4m-2q-2} - a_{4m-2q-1} x_p{}^{4m-2q-1};$$

ainsi nous pouvons poser l'équation

$$\mathrm{y} = f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{2(2m-q-1)} x^{2(2m-q-1)},$$

dans laquelle y représente la demi-somme des ordonnées d'une couple de points arbitraire de la ligne $y = f(x)$.

Représentons les abscisses des $2q$ points connus par

$$\pm z_1, \pm z_2, \ldots \pm z_q;$$

les abscisses des $2(m-q)$ points qui doivent être déterminés par

$$\pm x_1, \pm x_2, \ldots \pm x_{m-q}$$

et le produit continu

$$(x^2 - z_1{}^2)(x^2 - z_2{}^2) \ldots (x^2 - z_q{}^2)(x^2 - x_1{}^2)(x^2 - x_2{}^2) \ldots \\ \ldots (x^2 - x^2_{m-q}) \text{ par } \Phi(x) \ldots (130)$$

Nous divisons $f(x)$ par $\Phi(x)$, ces deux fonctions étant rangées suivant les degrés descendants de x; soit $Q(x)$ le quotient et $R(x)$ le reste de cette division, nous avons alors

$$f(x) \quad = Q(x) \,.\, \Phi(x) + R(x),$$

d'où pour $x = \pm z_t : f(\pm z_t) = Q(\pm z_t) . \Phi(\pm z_t) + R(\pm z_t);$

et pour $x = \pm x_p : f(\pm x_p) = Q(\pm x_p) . \Phi(\pm x_p) + R(\pm x_p);$

mais $f(\pm z_t) = F(\pm z_t)$ et $\Phi(\pm z_t) = 0;$

de même $f(\pm x_p) = F(\pm x_p)$ et $\Phi(\pm x_p) = 0;$

donc

$$\left.\begin{array}{l} F(\pm z_1) = R(\pm z_1);\ F(\pm x_1) = R(\pm x_1); \\ F(\pm z_2) = R(\pm z_2);\ F(\pm x_2) = R(\pm x_2); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(\pm z_q) = R(\pm z_p);\ F(\pm x_{m-q}) = R(\pm x_{m-q}). \end{array}\right\} (131)$$

Les fonctions $F(x)$ et $R(x)$ sont du même degré, notamment du $2(m-1)^{\text{ème}}$ au plus, c'est à dire au moins deux degrés plus bas que $\Phi(x)$, de sorte qu'en $F(x)$ et $R(x)$ le nombre des coefficients à déterminer est égal à $2m$ au plus, ce qui s'accorde avec le nombre des équations sub (131) donnant une relation entre ces coefficients; par conséquent les coefficients de $F(x)$ et $R(x)$ doivent être indentiquement les mêmes; donc, $R(x)$ est la même fonction que $F(x)$.

Ainsi on a

$$f(x) = Q(x) \,.\, \Phi(x) + F(x)$$

et aussi

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q(x) \,.\, \Phi(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(x)\,dx.$$

L'erreur commise en remplaçant $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ par $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(x)\,dx$ est égale à

$$I' - I = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q(x) \,.\, \Phi(x)\,dx. \quad (132)$$

Afin que cette erreur soit égale à zéro, il faut qu'on ait

$$\int_{0}^{+\frac{1}{2}} Q(x) \,.\, \Phi(x)\,dx = 0$$

$Q(x)$ étant un polynôme du degré $2(m-q-1)$, de la forme

$$Q(x) = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + \ldots + C_{2(m-q-1)} x^{2(m-q-1)}.$$

Donc, si la valeur de l'expression sub (132) est égale à zéro, il faut qu'on satisfasse aux conditions

$$\int_{0}^{+\frac{1}{2}} \Phi(x)\,dx = 0;\ \int_{0}^{+\frac{1}{2}} x^2\,\Phi(x)\,dx = 0;\ \ldots$$

$$\ldots \int_{0}^{+\frac{1}{2}} x^{2(m-q-1)}\,\Phi(x)\,dx = 0 \ldots . \quad (133)$$

ce qui est toujours possible, parce que le nombre des équations de condition $(m-q)$ sub (133) s'accorde avec le nombre des abscisses à déterminer $x_1, x_2, \ldots x_{m-q}$.

§ 83. Les égalités sub (133) permettent des suppositions diverses. Quand, par exemple (comme le fait Gauss pour les

valeurs paires de n), on suppose que pas un seul point de la ligne $y = f(x)$ n'est connu, on a $q = o$.

Si l'on pose, comme sub (24),
la somme des grandeurs $x_1^2, x_2^2, \ldots x_m^2$ . . . . . $= S_1$,
la somme de leurs produits p à p . . . . $= S_p$,
l'équation sub (130) devient

$$\Phi(x) = x^{2m} - x^{2m-2} S_1 + x^{2m-4} S_2 - \ldots (-1)^m S_m,$$

par quoi les équations sub (133) deviennent

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} \left\{ x^{2m} - x^{2m-2} S_1 + x^{2m-4} S_2 - \ldots (-1)^m S_m \right\} dx = 0;$$

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} x^2 \left\{ x^{2m} - x^{2m-2} S_1 + x^{2m-4} S_2 - \ldots (-1)^m S_m \right\} dx = 0;$$

. . . .

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} x^{2(m-1)} \left\{ x^{2m} - x^{2m-2} S_1 + x^{2m-4} S_2 - \ldots (-1)^m S_m \right\} dx = 0.$$

De ces égalités, on retrouve les mêmes équations pour le calcul des m abscisses x_p que nous avons trouvées déjà au § 24.

Quand on prend ensuite (de même que le fait Gauss pour les valeurs impaires de n) $q = 1$ et $z = 0$, alors (130) devient

$$\Phi(x) = x^2 \{x^{2(m-1)} - x^{2(m-2)} S_1 + \ldots (-1)^{m-1} S_{m-1}\}$$

et les égalités sub (133) se changent en

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} x^2 \left\{ x^{2(m-1)} - x^{2(m-2)} S_1 + \ldots (-1)^{m-1} S_{m-1} \right\} dx = 0;$$

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} x^4 \left\{ x^{2(m-1)} - x^{2(m-2)} S_1 + \ldots (-1)^{m-1} S_{m-1} \right\} dx = 0;$$

. . . .

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} x^{2(m-2)} \left\{ x^{3(m-1)} - x^{2(m-2)} S_1 + \ldots (-1)^{m-1} S_{m-1} \right\} dx = 0;$$

qui conduisent aux premières équations du § 26.

§ 84. Il est clair que la solution de questions comme celles traitées dans les §§ 29 et suivants peut se faire aussi très facilement par les formules développées dans le § 82. En prenant, par exemple, le cas de $m = 2$ et $q = 1$, on a de (130)

$$\Phi(x) = (x^2 - z_1^2)(x^2 - x_1^2).$$

En supposant ici que les deux points connus coïncident avec les points extrêmes de la courbe, on a

$$\Phi(x) = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - x_1^2\right) = x^4 - \left(\frac{1}{4} + x_1^2\right)x^2 + \frac{1}{4}x_1^2$$

donc

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} \left\{x^4 - \left(\frac{1}{4} + x_1^2\right)x^2 + \frac{1}{4}x_1^2\right\}dx = 0$$

d'où il résulte

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{4} + x_1^2\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)x_1^2 = 0.$$

On trouve d'après cette équation

$$x_1^2 = \frac{1}{20}, \text{ ainsi } x_1 = 0,2236\ 0680\ \ldots.$$

ensuite d'après (21)

$$I = \frac{H}{12}\left\{5\,(y_{-1} + y_{+1}) + (y_{-2} + y_{+2})\right\}.$$

Etc.

Termes de correction.

§ 85. Soit dans l'équation

$$y = f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \ldots + \\ + a_{2m} x^{2m} + a_{2m+2} x^{2m+2} + a_{2m+4} x^{2m+4} + \text{etc.}$$

y la demi-somme des ordonnées de deux points de la courbe AB, fig. 2, qui se trouvent de part et d'autre à une distance égale mais arbitraire de l'axe Y.

On trace par $2m$ points connus de cette courbe une ligne parabolique. Nous représentons les abscisses de ces $2m$ points par $\pm x_1, \pm x_2, \ldots \pm x_m$ et le produit continu

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots(x^2 - x_m^2) \text{ par } \Phi(x).$$

Si l'on fait le même raisonnement qui a conduit à la formule sub (132), en supposant qu'ici $\Phi(x)$ et $Q(x)$ ont la même signification que dans le § 82, on trouve que l'erreur

commise quand on remplace $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ par $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(x)\,dx$, est égale à $I' - I = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(x)\,dx =$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} Q(x).\,\Phi(x)\,dx.$$

Nous remarquons que le quotient $Q(x)$ est composé seulement de termes avec des degrés positifs de x, y compris un terme avec le degré zéro, et qu'en divisant $f(x)$ par $\Phi(x)$ ces deux fonctions étaient rangées d'après les degrés descendants de x.

Toutefois le quotient $Q(x)$ peut être trouvé aussi en multipliant $\frac{1}{\Phi(x)}$ par $f(x)$, dans la supposition que $\Phi(x)$ est rangé d'après les degrés descendants et $f(x)$ d'après les degrés croissants de x.

Nous avons

$$\frac{1}{\Phi(x)} = \frac{1}{x^{2m} - S_1\, x^{2m-2} + S_2\, x^{2m-4} - \ldots (-1)^m S_m} =$$

$$= \frac{1}{x^{2m}} + \frac{S_1}{x^{2(m+1)}} + \frac{S_1^2 - S_2}{x^{2(m+2)}} + \frac{S_1^3 - 2\,S_1\,S_2 + S_3}{x^{2(m+3)}} + \ldots\ldots$$

Multiplions $\frac{1}{\Phi(x)}$ par $f(x)$.

Pour ne faire paraître que les termes de $Q(x)$ que nous trouvons si nous divisons $f(x)$ par $\Phi(x)$, les termes de ces fonctions étant rangés suivant les degrés descendants, on ne doit prendre que ceux-là des produits partiels qui produisent des degrés positifs de x, y compris le degré zéro.

Nous obtenons

$$\begin{aligned} Q(x) = a_{2m} &+ a_{2m+2}\, x^2 + a_{2m+4}\, x^4 + a_{2m+6}\, x^6 + \ldots \\ &+ a_{2m+2}\, S_1 + a_{2m+4}\, x^2\, S_1 + a_{2m+6}\, x^4\, S_1 + \ldots \\ &+ a_{2m+4}\, (S_1^2 - S_2) + a_{2m+6}\, x^2\, (S_1^2 - S_2) + \ldots \\ &+ \text{etc.}\ldots \end{aligned}$$

Par conséquent, la correction cherchée est représentée par

$$I'-I=2a_{2m}\int_0^{+\frac{1}{2}}\Phi(x)\,dx+2a_{2m+2}\int_0^{+\frac{1}{2}}\left\{x^2+S_1\right\}\Phi(x)\,dx+$$
$$+2a_{2m+4}\int_0^{+\frac{1}{2}}\left\{x^4+x^2S_1+(S_1{}^2-S_2)\right\}\Phi(x)\,dx+$$
$$+2a_{2m+6}\int_0^{+\frac{1}{2}}\left\{x^6+x^4S_1+x^2(S_1{}^2-S_2)+\ldots\right\}\Phi(x)\,dx+$$
$$+\text{etc.}\ \ldots \quad (134)$$

Calcul de la valeur de termes de correction.

§ 86. Premièrement nous supposons que la figure est divisée en bandes de largeur égale, comme d'après la méthode de Newton-Cotes, et que nous voulons calculer les trois premiers termes pour $n=2$. Nous trouvons, puisque $m=1$, $x_1=\frac{1}{2}$, $S_1=x_1{}^2=\frac{1}{4}$, $S_1{}^2=\frac{1}{16}$, $S_2=0$ et $\Phi(x)=x^2-\frac{1}{4}$:

$$\text{corr:}=2a_2\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx+2a_4\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx+$$
$$+2a_6\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^4+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx+\ldots=$$
$$=2a_2\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx+2a_4\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^4-\frac{1}{16}\right)dx+$$
$$+2a_6\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^6-\frac{1}{64}\right)dx+\ldots$$

ou puisque $\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$;

$$\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^4-\frac{1}{16}\right)dx=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{40},\ \text{et}$$
$$\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^6-\frac{1}{64}\right)dx=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7-\frac{1}{64}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{448},$$

on a, pour $n=2$, corr: $=-\frac{1}{6}a_2-\frac{1}{20}a_4-\frac{3}{224}a_6-\ldots.$

Si $n=3$, nous avons pour les trois premiers termes, puisqu'alors $m=2$, $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$, $S_1=\frac{1}{4}$, $S_1{}^2=\frac{1}{16}$, $S_2=0$ et

$$\Phi(x)=x^2(x^2-x_2{}^2)=x^2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=x^4-\frac{1}{4}x^2:$$

$$\text{corr:} = 2a_4\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^4-\frac{1}{4}x^2\right)dx+2a_6\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(x^4-\frac{1}{4}x^2\right)dx+$$

$$+2a_8\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^4+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16}\right)\left(x^4-\frac{1}{4}x^2\right)dx+\ldots=$$

$$=2a_4\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^4-\frac{1}{4}x^2\right)dx+2a_6\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^6-\frac{1}{16}x^2\right)dx+$$

$$+2a_8\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^8-\frac{1}{64}x^2\right)dx+\ldots$$

d'où, pour $n=3$,

$$\text{corr:} = -\frac{1}{120}a_4-\frac{1}{336}a_6-\frac{1}{1152}a_8-\ldots$$

D'après la méthode de MacLaurin on a, par exemple, pour $n=4$, pour le premier terme de correction, m étant alors égal à 2, $x_1=\frac{1}{8}$, $x_2=\frac{3}{8}$ et $\Phi(x)=x^4-\frac{5}{32}x^2+\frac{9}{4096}$:

$$\text{corr:} = 2a_4\int_0^{+\frac{1}{2}}\left(x^4-\frac{5}{32}x^2+\frac{9}{4096}\right)dx=$$

$$=2a_4\left\{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{5}{32}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{9}{4096}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{24}+\frac{9}{256}\right)a_4=\frac{103}{6\,1440}a_4.$$

En appliquant les ordonnées de Gauss, nous remarquons que, pour un nombre pair de $n=2m$, les valeurs de x_1, $x_2, \ldots x_m$ sont définies de telle manière qu'on a satisfait aux conditions exposées sub (133), dans le cas $q=o$, de sorte qu'en (134) les premiers m termes de correction dont le dernier est affecté de a_{4m-2}, sont tous égaux à zéro. Dans les termes suivants, notamment

$$2a_{4m}\int_0^{+\frac{1}{2}}\left\{x^{2m}+x^{2m-2}S_1+x^{2m-4}(S_1{}^2-S_2)+\ldots\right\}\Phi(x)\,dx+$$

$$+2a_{4m+2}\int_0^{+\frac{1}{2}}\left\{x^{2m+2}+x^{2m}S_1+x^{2m-2}(S_1{}^2-S_2)+\ldots\right\}\Phi(x)\,dx+$$

$$+2a_{4m+4}\int_0^{+\frac{1}{2}}\left\{x^{2m+4}+x^{2m+2}S_1+x^{2m}(S_1{}^2-S_2)+\ldots\right\}\Phi(x)\,dx+\text{etc.}$$

tous les produits entre les accolades { }, dont le degré de x est égal à ou plus petit que $(2m-2)$, demeurent, d'après (133), sans influence sur la valeur de la correction. Il s'ensuit que si l'on se sert d'un nombre pair d'ordonnées selon Gauss la correction est représentée par

$$\text{corr:} = 2\,a_{4m}\int_0^{+\frac{1}{2}} x^{2m}\,\Phi(x)\,dx + 2\,a_{4m+2}\int_0^{+\frac{1}{2}} (x^{2m+2} + x^{2m}S_1)\,\Phi(x)\,dx + 2\,a_{4m+4}\int_0^{+\frac{1}{2}} \left\{x^{2m+4} + x^{2m+2}S_1 + x^{2m}(S_1^{\,2}-S_2)\right\}\Phi(x)\,dx + \text{etc.}$$

où

$$\Phi(x) = x^{2m} - S_1\,x^{2m-2} + S_2\,x^{2m-4} - \ldots (-1)^m S_m,$$

d'où l'on trouve pour corr: la même formule que nous avons déjà trouvée dans le § 24.

Avec un nombre impair $n = 2m-1$ d'ordonnées à mesurer selon Gauss, on a, puisqu'alors $q = 1$ et $S_m = 0$,

$$\Phi(x) = x^{2m} - S_1\,x^{2m-2} + S_2\,x^{2m-4} - \ldots (-1)^{m-1} S_{m-1}\,x^2$$

et

$$\text{corr:} = 2a_{4m-2}\int_0^{+\frac{1}{2}} x^{2m-2}\,\Phi(x)\,dx + 2a_{4m}\int_0^{+\frac{1}{2}} (x^{2m} + x^{2m-2}S_1)\,\Phi(x)\,dx + \text{etc.};$$

où

$$\Phi(x) = x^{2m} - S_1\,x^{2m-2} + S_2\,x^{2m-4} - \ldots (-1)^{m-1} S_{m-1}\,x^2,$$

donc pour le premier terme de correction

$$\text{corr:} = 2\,a_{4m-2}\int_0^{+\frac{1}{2}} x^{2m-2}\left\{x^{2m} - S_1\,x^{2m-2} + S_2\,x^{2m-4} - \ldots (-1)^{m-1} S_{m-1}\,x^2\right\}dx =$$

$$= 2\,a_{4m-2}\int_0^{+\frac{1}{2}}\left\{x^{4m-2} - S_1\,x^{4m-4} + S_2\,x^{4m-6} - \ldots (-1)^{m-1} S_{m-1}\,x^{2m}\right\}dx =$$

$$= \left\{\frac{1}{4m-1} - \frac{2^2}{4m-3}S_1 + \frac{2^4}{4m-5}S_2 - \ldots (-1)^{m-1}\frac{2^{2m-2}}{2m+1}S_{m-1}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{4m-2} a_{4m-2}.$$

Pour $n = 5$, c'est à dire $m = 3$, par exemple, on trouve pour le premier terme de correction

$$\mathrm{corr:} = \left\{\frac{1}{11} - \frac{4}{9} S_1 + \frac{16}{7} S_2\right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} a_{10},$$

ou, parce que, d'après § 26,

$$S_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \text{ et } S_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{336}$$

$$\mathrm{corr:} = \left\{\frac{1}{11} - \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{18} + \frac{16}{7} \cdot \frac{5}{336}\right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} a_{10} = \frac{1}{69\ 8544} a_{10}.$$

Approximation de la valeur de l'intégrale d'un produit.

§ 87. Soit donnée l'intégrale

$$I' = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} dx$$

du § 58, en supposant que $f(x)$ peut être remplacé, avec une approximation suffisante, par la série

$$F(x) = c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \ldots + c_{4m-2} x^{4m-2}$$

alors la formule (90) devient

$$I = \frac{1}{8} \pi \left\{c_0 + \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{4} c_2 + \frac{1 \,.\, 3}{4 \,.\, 6} \left(\frac{1}{4}\right)^2 c_4 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1 \,.\, 3 \ldots (4m-5)(4m-3)}{4 \,.\, 6 \ldots (4m-2) 4m} \left(\frac{1}{4}\right)^{2m-1} c_{4m-2}\right\}.$$

Il s'agit maintenant de savoir pour quelle valeur de x on devra déterminer la valeur de la fonction $F(x)$, afin que la ligne parabolique qui y correspond, donne la valeur la plus approchée de l'intégrale.

Pour résoudre cette question, on peut appliquer ici les mêmes principes qui nous ont fait connaître les abscisses d'après Gauss.

Supposons que les abscisses inconnues sont

$$\pm x_1, \ \pm x_2, \ \ldots \pm x_m$$

et posons

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \ldots (x^2 - x_m^2) = \Phi(x);$$

divisons $F(x)$ par $\Phi(x)$, soit $Q(x)$ le quotient et $R(x)$ le reste de cette division, alors on a

$$F(x) = \Phi(x) \,.\, Q(x) + R(x)$$

et

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} dx =$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \Phi(x) \,.\, Q(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} dx +$$
$$+ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} R(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} dx.$$

Ainsi que dans le § 82, nous observons que $R(x)$ est la fonction du $2(m-1)^{\text{ème}}$ degré qui, quand on se sert des abscisses indiquées, a la même valeur que la fonction $F(x)$; cette fonction $R(x)$ produira alors pour l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} dx$ la même valeur, si nous pouvons déterminer les abscisses $\pm x_1$, $\pm x_2$, ... $\pm x_m$ de telle manière que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \Phi(x) \,.\, Q(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} dx = 0 \quad . \; . \; . \; (135)$$

ce qui est possible quand $Q(x)$ n'est pas d'un plus haut degré que le $2(m-1)^{\text{ème}}$, car dans ce cas nous pouvons faire répondre les $2m$ abscisses $\pm x_1^2$, $\pm x_2^2$, ... $\pm x_m^2$ aux m équations

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \Phi(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} dx = 0,$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^2 \Phi(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} dx = 0, \ldots$$
$$\ldots \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^{2m-2} \Phi(x) \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} dx = 0,$$

on aura satisfait aussi à (135), indépendamment des coefficients numériques que $Q(x)$ peut avoir.

Nous trouvons, par exemple, pour $m=3$:

$$\Phi(x)=(x^2-x_1{}^2)(x^2-x_2{}^2)(x^2-x_3{}^2)=x^6-x^4S_1+x^2S_2-S_3;$$
$$x^2\Phi(x)=x^8-x^6S_1+x^4S_2-x^2S_3;$$
$$x^4\Phi(x)=x^{10}-x^8S_1+x^6S_2-x^4S_3,$$

et puisque $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=\frac{1}{8}\pi,$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^2\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{8}\pi,$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^4\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{8}\pi,$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^6\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{8}\pi,$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^8\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{1}{8}\pi \text{ et}$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^{10}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=\frac{9}{12}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^5\frac{1}{8}\pi,$$

il faut qu'on ait

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\Phi(x)\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}(x^6-x^4S_1+x^2S_2-S_3)\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=0,$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^2\Phi(x)\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}(x^8-x^6S_1+x^4S_2-x^2S_3)\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=0 \text{ et}$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x^4\Phi(x)\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}(x^{10}-x^8S_1+x^6S_2-x^4S_3)\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\,dx=0$$

ainsi

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^3-\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2S_1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)S_2-S_3=0$$

etc.; c'est à dire que pour résoudre les valeurs de S_1, S_2 et S_3 nous trouvons les mêmes équations que nous avons trouvées déjà dans le § 58.

§ 88. Supposons que dans l'intégrale du § 61 pour $q=1$

$$I' = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x f(x)\, dx,$$

$f(x)$ peut être représentée par

$$F(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \text{etc.}$$

alors la valeur approchée de l'intégrale est

$$I = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} a_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6} a_4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{8} a_6 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \text{etc.}$$

Soient $\pm x_1$, $\pm x_2$, ... $\pm x_m$ les abscisses pour lesquelles la valeur de $F(x)$ est mesurée ou calculée; posons encore

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \ldots (x^2 - x_m^2) = \Phi(x);$$

divisons $F(x)$ par $\Phi(x)$, soit $Q(x)$ le quotient, $R(x)$ le reste de sorte que

$$F(x) = \Phi(x) \,.\, Q(x) + R(x);$$

ainsi

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x F(x)\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x \Phi(x) \,.\, Q(x)\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x R(x) dx. \quad (136)$$

Si maintenant $F(x)$ n'est pas d'un degré plus haut que $(4m-2)$, le degré de $Q(x)$ ne sera pas plus haut que $(2m-2)$, et la première intégrale dans le second membre de (136) est égale à zéro, si nous déterminons $\Phi(x)$ par les m conditions

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x \Phi(x) dx = 0; \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^3 \Phi(x) dx = 0; .. \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^{2m-1} \Phi(x) dx = 0. \quad (137)$$

Puisque $\Phi(x)$ dépend de m abscisses $\pm x$, à chacune desquelles nous pouvons donner une valeur arbitraire, il est toujours possible de satisfaire à toutes ces conditions; pour l'intégration, $R(x)$ peut occuper la place de $F(x)$, et, par conséquent, avec m couples d'abscisses, l'intégrale peut

être déterminée aussi exactement que d'une autre manière avec $2m$ couples d'abscisses.

Soit, par exemple, $m = 3$. Posons

$$\Phi(x) = x^6 - x^4 S_1 + x^2 S_2 - S_3$$

alors les conditions sub (137) sont

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (x^7 - x^5 S_1 + x^3 S_2 - x S_3)\, dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^7 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^5 S_1 + $$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 S_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) S_3 = 0;$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (x^9 - x^7 S_1 + x^5 S_2 - x^3 S_3)\, dx = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^7 S_1 + $$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^5 S_2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 S_3 = 0;$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (x^{11} - x^9 S_1 + x^7 S_2 - x^5 S_3)\, dx = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{11} - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^9 S_1 + $$
$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^7 S_2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^5 S_3 = 0;$$

d'où $S_1 = \frac{3}{8}$, $S_2 = \frac{3}{80}$ et $S_3 = \frac{1}{1280}$;

etc. voyez le § 62.

Lieu géométrique d'un point indéterminé.

§ 89. Si l'on veut représenter par une ligne parabolique le lieu géométrique d'un point indéterminé situé sur une surface plane (6), point répondant à certaines conditions connues, dans ce cas la ligne parabolique indiquera en général le plus exactement la situation de ce point si l'on choisit les abscisses des points connus de telle façon qu'elles coïncident avec celles appliquées avec la méthode de Gauss.

Admettons, pour démontrer ce cas, que la fonction du $n^{\text{ième}}$ degré

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

doive être représentée approximativement, pour les valeurs

de x intermédiaires entre $x = -\frac{1}{2}$ et $x = +\frac{1}{2}$, par la fonction du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

et que, les coefficients soient déterminés par une condition, à savoir que pour les n valeurs de x: $x_1, x_2, \ldots x_n$ cette dernière fonction produise les mêmes valeurs que la fonction donnée $f(x)$.

Représentons par $\Phi(x)$ le produit

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Quand nous divisons $f(x)$ par $\Phi(x)$, le quotient sera a_n, parce qu'ici le diviseur et le dividende sont du même degré; le reste est une fonction du $(n-1)^{\text{ème}}$ degré.

Comme dans le § 82, on démontre ici que ce reste n'est pas différent de $F(x)$. Ainsi nous avons

$$f(x) - F(x) = a_n \Phi(x).$$

Le second degré de la valeur moyenne de la faute est exprimé par

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} a_n^2 \{\Phi(x)\}^2 dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

Afin que la valeur de l'expression sub (138) soit aussi petite que possible,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2 dx$$

regardée maintenant comme fonction de $x_1, x_2, \ldots x_n$ doit être réduite à un minimum.

Les quotients différentiels partiels de cette intégrale par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_n$, peuvent être représentés sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} -2(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)\,\Phi(x)\,dx = 0, \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} -2(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)\,\Phi(x)\,dx = 0, \\ \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} (139)$$

En développant, on obtient n équations pour déterminer les n inconnues x_p, mais puisqu'ici, sous le signe intégral, $\Phi(x)$ est multiplié chaque fois par une fonction du $(n-1)^{\text{ème}}$ degré, on aura satisfait à la question si

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} \Phi(x)\,dx = 0, \int_0^{+\frac{1}{2}} x\,\Phi(x)\,dx = 0, \ldots$$
$$\ldots \int_0^{+\frac{1}{2}} x^{n-1}\,\Phi(x)\,dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Il résulte en effet de ces relations, en les multipliant successivement par les coefficients arbitraires C_0, C_1, ... C_{n-1} et en additionnant

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} \left\{ C_0 + C_1\,x + C_2\,x^2 + \ldots + C_{n-1}\,x^{n-1} \right\} \Phi(x)\,dx = 0$$

ou par abréviation

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} \psi(x)\,.\,\Phi(x)\,dx = 0,$$

dans laquelle $\psi(x)$ est une fonction arbitraire du $(n-1)^{\text{éme}}$ degré. Par conséquent, on aura satisfait aux conditions (139) si $\Phi(x)$ satisfait aux conditions (140). Ces dernières coïncident avec ce qui se trouve sub (133) pour déterminer les abscisses d'après Gauss. Nous renvoyons ici au § 24.

§ 90. Il résulte de la démonstration du paragraphe précédent qu'une parabole du $n^{\text{ème}}$ degré selon Gauss se joindra à une courbe arbitraire à peu près aussi bien qu'une parabole du $(n+1)^{\text{ème}}$ degré selon Newton-Cotes, dans la supposition que la parabole de Gauss a n, et la parabole de Newton-Cotes $(n+1)$ points en commun avec la courbe arbitraire; tandis qu'il résulte du § 83 que l'ordonnée moyenne de la parabole de Gauss du $n^{\text{ème}}$ degré est à peu près égale à celle de la parabole de Newton-Cotes du $2\,n^{\text{ème}}$ degré.

Il s'ensuit que si, par exemple, on veut conclure de n observations thermométriques par jour à la température moyenne de la journée ou à la température à un moment donné où l'on n'a pas fait d'observation, ou pourra, dans les deux cas, se servir avec succès des abscisses selon Gauss (7),

de telle sorte que, pour la température moyenne, n observations d'après Gauss équivaudront à $2n$ d'après Newton-Cotes, et que, pour déterminer la température à des moments arrêtés, n observations selon Gauss donneront un résultat aussi exact que $(n+1)$ selon Newton-Cotes.

Concernant les observations avec application des abscisses selon Gauss, Encke (8) fait remarquer ce qui suit:

»Dans les cinq premières années de l'existence du nouvel »observatoire astronomique de Berlin, mon adjoint d'alors, à »présent directeur de l'observatoire astronomique de Breslau, »le professeur Galle, notait trois fois par jour [1]) la hauteur »du baromètre et du thermomètre aux moments de la neu»vième partie de la période totale du jour après le lever et »avant le coucher du soleil et à midi vrai (9). De cette manière »il parvint à la même exactitude que s'il avait fait les obser»vations cinq fois par jour, à des intervalles égaux. Le fait »fut en effet confirmé par l'expérience, lorsqu'il déduisit de »ses observations la hauteur moyenne du thermomètre et du »baromètre et lorsqu'il compara le résultat avec celui des »observations faites pendant une longue série d'années".

CHAPITRE VIII.

Notice historique sur la découverte et le développement des méthodes d'approximation de l'aire de figures curvilignes.

§ 91. Dans les siècles les plus reculés, nous trouvons que les mathématiciens se sont occupés du calcul de l'aire ou, selon le langage des anciens, de la quadrature de figures curvilignes, c'est à dire de la manière de quarrer, de mesurer leur surface.

Dans l'antiquité, les mathématiques étaient cultivées par un petit nombre d'hommes priviligiés, dispensés, par leurs

1) Le temps pendant lequel le soleil se trouve au-dessus de l'horizon.

fonctions, des préoccupations matérielles de l'existence. Ainsi les prêtres de l'Egypte, les Chaldéens de Babylone et les brames des Indes, ayant le loisir de s'adonner à l'étude, ont été des hommes de science, et sont parvenus à des résultats remarquables. Cependant le petit nombre d'hommes qui s'occupaient d'une science, la difficulté des démonstrations mathématiques, la rareté des exemplaires sur lesquels ces démonstrations étaient développées et gardées (10), les précautions qu'on prenait pour cacher aux profanes les découvertes nouvelles, les luttes continuelles entre les peuples étaient autant d'entraves apportées au développement des sciences, autant de causes, pour elles, de disparition et d'oubli; de sorte qu'il est arrivé souvent que, dans un certain pays, on a considéré comme une découverte remarquable ce qui, depuis un temps immémorial, était déjà connu ailleurs. Quelquefois aussi les sciences mathématiques marchaient très lentement ou semblaient tout à fait stationnaires (11). C'est pourquoi aussi, au cours des siècles, un grand nombre de mathématiciens se sont appliqués à retrouver des résultats perdus, en particulier la détermination de l'aire du cercle et la relation entre sa circonférence et son diamètre (à représenter par la lettre grecque π (12)), pour laquelle tant de valeurs différentes ont été adoptées dans l'antiquité par les divers peuples.

Jusqu'ici l'Egypte est regardée comme le berceau des sciences, particulièrement de la géométrie. Le papyrus de Rhind, écrit entre les années 2000 et 1700 avant Jésus-Christ, apprend qu'à cette époque lointaine l'aire du cercle pouvait déjà être déterminée avec une exactitude assez grande. On trouve dans ce papyrus que cette aire est égale à celle d'un carré dont le côté a les $\frac{8}{9}$ du diamètre du cercle, ce qui revient à une valeur de $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3{,}1605\ldots$ (13). Le papyrus ne donne pas seulement la preuve que l'auteur connaît la formule de la surface du cercle, mais encore il se livre à divers calculs qui permettent de conclure que les Egyptiens se servaient de la formule depuis longtemps (14).

On ne peut pas tirer directement de l'Ecriture Sainte la preuve irréfutable que les Israélites du temps de Salomon (± 1000 avant Jésus-Christ) aient connu une valeur assez approchée de π. Nous avons cependant tout lieu de le croire comme j'ai essayé de le démontrer ailleurs (15). —

Le cercle était un des sujets d'étude favoris des anciens mathématiciens grecs les plus illustres.

Hippocrate de Chios (± 440 avant Jésus-Christ) a été, pour autant que nous le sachions, le premier qui prouva que les aires de cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs diamétres et qui tâcha de parvenir à la quadrature du cercle (16).

Anaxagore de Clazomènes (500—425 avant Jésus-Christ) aurait dessiné la quadrature du cercle, comme dit Plutarque. On ne peut pas supposer qu'Anaxagore se soit douté du manque d'exactitude des formules; comme beaucoup de mathématiciens qui sont venus après lui, il aura poursuivi la quadrature parfaite (16).

Antiphon (± 400 avant Jésus-Christ) paraît avoir adopté deux méthodes qui se ressemblent beaucoup. Suivant la première, il inscrivait dans le cercle des polygones réguliers de 4, 8, 16, . . . côtés, et affirmait qu'en continuant de la sorte on devait parvenir enfin à un polygone dont les côtés seraient si petits qu'ils se confondraient avec la circonférence du cercle, et il dessinait un carré dont l'aire était la même que celle du polygone et, par conséquent, à peu près celle du cercle — construction qu'on savait déjà faire en ce temps là —. Suivant la seconde méthode, Antiphon traçait dans le cercle un triangle équilatéral et sur chaque côté un triangle dont le sommet tombait sur la circonférence et ainsi de suite en doublant toujours le nombre des triangles. Il croyait qu'enfin les côtés des triangles deviendraient si petits qu'ils tomberaient sur la circonférence du cercle (16).

Bryson d'Héraclée (± 400 avant Jésus-Christ) tâcha d'arriver au même but en doublant continuellement le nombre des côtés des polygones inscrits et circonscrits et pensait qu'il arriverait enfin à deux polygones dont le cercle serait la moyenne arithmétique. Ainsi, en cette matière, il surpas-

sait de beaucoup Antiphon et sa manière de faire montre qu'il avait déjà l'intuition de la formule par laquelle on déterminera plus tard approximativement l'aire du cercle.

Archimède (287—212 avant Jésus-Christ) a donné des valeurs assez exactes de π. Ce grand mathématicien qui s'est occupé avec un succès si remarquable du calcul des surfaces et des volumes a été probablement le premier qui ait trouvé une solution exacte de la question. Dans la proposition II de son traité: De la mesure du cercle il dit: »Le rapport »de l'aire d'un cercle à celle du carré sur son diamètre est à „peu près comme 11 est à 14", ce qui revient à $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, ou à peu près à $\pi = 3{,}143\ldots$ Il démontre ensuite que si nombreux que soient les côtés des polygones le cercle est toujours plus grand que le polygone inscrit et plus petit que le polygone circonscrit. Il continue les calculs jusqu'au polygone de 96 côtés et trouve enfin, en déterminant chaque fois la relation entre les côtés des deux polygones, que $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ ou $3{,}1429\ldots > \pi > 3{,}1408\ldots$ (17).

Archimède a été aussi le premier qui ait donné la quadrature de la parabole du second degré et de l'ellipse (18).

Il emploie deux méthodes pour parvenir à la quadrature de la parabole. Dans la première, il se sert de la détermination du centre de gravité de figures planes; dans la seconde, il dessine successivement des triangles dans les segments paraboliques; il obtient ainsi un polygone dont on peut déterminer la valeur limite. En effet, les aires de ces triangles ont la même relation que les membres de la série 1, $\left(\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^3$,... dont le premier membre représente l'aire du premier triangle et la somme $1\frac{1}{3}$ l'aire de la section parabolique totale. —

Archimède, en cherchant une valeur approximative de π, avait simplement en vue de trouver une construction théoriquement juste suivant laquelle l'aire ou la circonférence du cercle pouvait être déterminée aussi exactement qu'on le

voulait. Il savait fort bien — de même que la plupart des mathématiciens grecs des siècles suivants — que le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre incommensurable. A partir de cette époque, il n'y a certainement eu que fort peu de mathématiciens grecs qui eussent l'espoir de trouver une commune mesure entre la circonférence et le diamètre.

Les premiers siècles de l'ère chrétienne ne nous ont laissé aucun ouvrage qui traite de la quadrature. Pendant la longue période du moyen-âge (500—1500), l'Europe fut plongée dans une ignorance profonde. Tandis que l'Occident avait complètement oublié l'ancienne géométrie grecque, les savants arabes de Bagdad et de Cordoue s'en occupaient et, chez eux, du VIIIe au XIIIe siècle, l'étude des sciences, partout ailleurs abandonnées, demeure en grand honneur. Ils s'y adonnent avec passion et font des progrès importants dans les branches les plus variées. Trois frères, Mohammed, el-Hasan et Ahmed, fils de Mûsâ ben Schâker, furent célèbres par les traductions qu'ils donnèrent de divers ouvrages grecs et hindous, et par leurs propres travaux sur toutes les parties des sciences mathématiques. Plusieurs de leurs livres nous sont parvenus. Un des ouvrages de Mohammed contient, entre autre, une partie géométrique sur la mesure des surfaces. On y remarque les trois expressions $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$ et $\frac{62\ 832}{20\ 000}$ du rapport approché de la circonférence du cercle au diamètre (19). Il paraît que le rapport $\frac{62\ 832}{20\ 000} = \frac{3927}{1250} = 3,1416$ est dû aux Indiens, qui l'avaient trouvé en calculant le côté du polygone régulier de 768 côtés (20). Le rapport $\sqrt{10}$ aussi vient des Indes (21) et se trouve, comme les rapports $\frac{22}{7}$ et $\frac{62\ 832}{20\ 000}$, dans un ouvrage sur l'algèbre du savant auteur arabe Mohammed ibn Mûsa Alchwarizmi, qui a vécu apparemment dans les premières années du IXème siècle. Il est dit dans cet ouvrage, et cela est quelque peu étonnant, que le rapport $\frac{22}{7} = 3,14286\ldots$

est appliqué dans la pratique ordinaire, mais que les géomètres connaissent deux autres rapports, qui sont $\pi = \sqrt{10} (= 3{,}16228\ldots)$ et $\pi = \frac{62\ 832}{20\ 000} (= 3{,}1416\ldots)$. —

Quoiqu'on puisse dire que la question de la quadrature du cercle a été résolue par Archimède d'une manière définitive et que celui-ci a indiqué la voie qu'on devait suivre pour exprimer la relation entre la circonférence et le diamètre à autant de décimales que l'on désirait, on trouve de nouveau, beaucoup de siècles après lui, des savants qui cherchent l'introuvable, c'est à dire qui cherchent à dessiner un carré dont l'aire soit absolument égale à celle d'un cercle donné.

Surtout au moyen-age et aussi plus tard beaucoup de mathématiciens et non des moins instruits s'occupèrent encore de la solution d'un problème qu'Archimède, 17 siècles auparavant, avait démontré insoluble.

Ainsi, par exemple, des mathématiciens, très méritants d'ailleurs, tels que Michel Stifel (22) et Simon Duchesne (23) n'étaient pas convaincus de l'impossibilité de la quadrature du cercle. Chacun à sa manière se donna beaucoup de peine pour résoudre la question. Le premier, pour démontrer la possibilité de la solution, publia la proposition suivante: »Comme il y a un carré plus grand qu'un cercle donné, et »aussi un carré qui est plus petit, il doit en exister un »qui soit juste aussi grand que le cercle (24)".

La relation simple $\pi = \frac{22}{7}$ donnée par Archimède et la méthode de la déterminer ne furent connues, hors de la Grèce, que longtemps après leur publication. Longtemps on se servit en Grèce exclusivement de la relation $\frac{22}{7}$ et dans les Indes de la relation $\sqrt{10}$. Beaucoup plus tard, on connut dans les Indes des rapports plus exacts, l'un d'eux même était poussé jusqu'à la 17ème décimale. A cette même époque, on était en Europe encore bien loin de posséder une semblable approximation (25).

En 1590, van Roomen, plus connu sous le nom d'Adrien

Romain (1561—1615), donna, dans ses *Ideae mathematicae pars prima, sive Methodus polygonum*, Louvain, 1590, une valeur de π exacte jusqu'à la 15ème décimale (26).

Dans son livre: *Arithmeticae et geometriae practica*, Franequerae, 1611, pag. 88—89, Adrien Metius fils, (1571—1635), explique comment son père, Adrien Antonisz, (= Adrien, fils d'Antoine) (1527—1607) — qui fut nommé, en 1573, bourguemestre d'Alcmaar — avait trouvé, vers 1589, la célèbre valeur approchée de $\pi = \frac{355}{113} = 3{,}1415929...$ exacte jusqu'à la sixième décimale (27).

Le géomètre hollandais, Ludolph van Ceulen (1540—1610) s'est occupé spécialement de calculer la valeur du rapport approché de π. Il donna ce rapport avec un degré d'approximation qui surpassait de beaucoup tous les calculs précédents. Dans son ouvrage *Van den Cirkel en de Interest*, Delft, 1596, il donna, en suivant la méthode d'Archimède, une valeur de π exacte jusqu'à la 32ème décimale. L'œuvre de van Ceulen fut réimprimée après sa mort, en 1615, à Leyde, sous la surveillance de sa veuve qui, du vivant de son mari, avait pris une part active aux calculs très laborieux de ladite valeur.

W. Snellius (1591—1626) employa toute sa vie, bien courte, à cultiver les sciences mathématiques. Il donna une traduction latine de l'ouvrage de van Ceulen, sous le titre: *De circulo et adscriptis*, Leyde, 1619, et, dans son ouvrage *Cyclometricus*, Leyde, 1621, un procédé plus rapide que celui suivi par son compatriote pour l'évaluation de la valeur de π. En supposant que la longueur du diamètre d'un cercle est égale à $\overline{1\ 000\ 000}^{3}$ fois le contour de la terre (28), on peut, au moyen de la valeur de π donnée par van Ceulen, calculer la circonférence de ce cercle à un micron près (29), exactitude qui surpasse de beaucoup le plus haut degré d'exactitude désirable.

Cependant de Lagny (1660—1734) présentait le 23 juin

1717 à l'Académie des Sciences de Paris un mémoire, dans lequel il avait calculé la valeur de π exactement jusqu'à 127 décimales (30). —

Bien que la quadrature de figures curvilignes, surtout de celle du cercle, ait été depuis l'antiquité le sujet d'étude favori des plus fameux mathématiciens, on peut dire que l'application de l'analyse à la quadrature n'a commencé à donner des résultats sérieux qu'un peu avant le milieu du 17ème siècle. Descartes (1596—1650), Cavalieri (1598—1647), Fermat (1601—1665) et Roberval (1602—1675), donnent la solution du problème de la quadrature d'une parabole du degré m: $y = x^m$, m représentant un nombre arbitraire, entier et positif.

Grégoire de Saint Vincent (1584—1667) appliqua, comme Cavalieri et Roberval, mais d'une manière qui lui était propre, les méthodes d'Archimède pour les quadratures des espaces curvilignes (31).

C'est entre 1650 et 1660 que Pascal (1623—1662) (32), Huygens (1629—1695), Wren (1632—1723) et Neil (1637—1670) ont fait connaître les moyens de quarrer quelques autres surfaces curvilignes. Huygens et Wren se disputent la gloire d'avoir découvert la quadrature d'une portion de la cycloïde (33).

Nous dirons ici en passant que Galilée (1564—1642) a été un des premiers mathématiciens qui se sont occupés de la cycloïde. La question était d'ailleurs bien au-dessus de ses moyens. Dans ses recherches pour déterminer l'aire de cette courbe, il s'est servi d'une balance, sur laquelle il pesait une figure matérielle.

Wallis (1616—1703) a donné le premier, dans son *Arithmetica infinitorum*, publiée en 1655, une démonstration à peu près générale de la formule de quadrature d'une parabole quelconque

$$y = \frac{x^m}{a^{m-1}}.$$

En cherchant une expression approximative pour l'aire du cercle, Brouncker (1620—1684) trouva en 1656 l'égalité

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 \ldots}}}}}$$

qui est l'origine de la théorie des fractions continues. Il partage l'honneur de la découverte de cette théorie avec Cataldi (1545—1626) et Schwenter (1585—1636).

Le 13 Avril 1668, Brouncker présenta à l'Académie Royale de Londres un traité sur la quadrature du segment d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes (34).

Mercator (1620—1687) (35), l'inventeur des suites infinies, est le premier qui ait donné, dans son Logarithmotechnia, Londres, 1668, une démonstration de la quadrature analytique de l'hyperbole, démonstration dans laquelle il avait la hardiesse de développer la division, indiquée par la fraction $\frac{1}{1+x}$, suivant les règles usitées de l'algèbre, ce qui donne la suite

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{etc.}$$

A première vue, ce procédé peut nous paraître des plus simples, et, étant données nos connaissances actuelles, nous sembler un progrès presque nul. Il n'en était pas de même pour les contemporains de Mercator qui, sans être capables de discerner exactement la portée du procédé qu'il révélait, sentaient du moins que ce procédé devait avoir de notables conséquences.

§ 92. James Gregory (1638—1675) fit connaître, dans son ouvrage Vera circuli et hyperbolae quadratura, Padoue, 1667, des procédés pour la quadrature approximative du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole. L'année suivante, dans ses Exercitationes geometricae, Londres, 1668, il publia une formule (36), au moyen de laquelle

on peut calculer approximativement l'aire d'une figure dont la ligne limite correspond à peu près à une portion d'une parabole du second degré ou à un système de portions analogues.

Soient, fig. 5, JL la ligne limite horizontale, JH et LF les lignes limites verticales de la figure que nous avons en vue; H, G et F des points de la ligne courbe limite; la courbe HGF, tracée par ces points, une portion d'une parabole du second degré dont l'équation est $y=a+bx+cx^2$, et $JK=$ $=KL$, alors on a, suivant Gregory $GHQ=\frac{HQ\times GQ}{2}-$ $-\frac{z.GQ}{12}$ et $FGR=\frac{GR\times FR}{2}-\frac{z.FR}{12}$, où z représente la seconde différence des longueurs des ordonnées y_1, y_2 et y_3. Ces expressions pour les aires GHQ et FGR sont exactes.

En effet il résulte de

$$\begin{aligned} y &= a + bx + cx^2: \\ y_1 &= a, \\ y_2 &= a + bh + ch^2, \\ y_3 &= a + 2bh + 4ch^2, \end{aligned}$$

et de ceci

$$y_3 - 2y_2 + y_1 = 2ch^2 = z;$$

ensuite

$$a=y,\ b=\frac{-y_2+4y_2-3y_1}{2h}\ \text{et}\ c=\frac{y_3-2y_2+y_1}{2h^2}.$$

On trouve pour l'aire

$$KGHJ=\int_0^h (a+bx+cx^2)\,dx=\frac{h}{12}(-y_3+8y_2+5y_1),$$

ainsi

$$GHQ=\frac{h}{12}\Big(-y_3+8y_2+y_1\Big)-\frac{12}{12}hy_2=$$

$$=\frac{6h}{12}\Big(y_1-y_2\Big)-\frac{h}{12}\Big(y_3-2y_2+1\Big)=\frac{HQ\times GQ}{2}-\frac{z.GQ}{12},$$

comme Gregory a trouvé. Ensuite

$$LFGK = \int_h^{2h} \left(a + bx + cx^2\right) dx = \frac{h}{12}\left(5\,y_3 + 8\,y_2 - y_1\right)$$

et

$$FGR = \frac{GR \times FR}{2} - \frac{z.FR}{12}$$

d'où ressort encore la justesse des formules de Gregory.

En additionnant les aires $KGHJ$ et $LFGK$, on trouve, pour l'aire de la figure entière,

$$LFHJ = \frac{h}{12}\left\{-y_3 + 8\,y_2 + 5\,y_1 + 5\,y_3 + 8\,y_2 - y_1\right\} =$$
$$= \frac{h}{3}\left(y_1 + 4\,y_2 + y_3\right),$$

(formule de Simpson que nous avons traitée déjà dans le § 4). Cependant Gregory n'a pas abouti à cette conclusion. —

Il a donné encore une seconde formule: Si l'on trace par les points H, G, F et E, fig. 6, de la vraie ligne limite de la figure, une courbe parabolique du troisième degré dont l'équation est

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

on a, suivant Gregory,

$$GHQ = \frac{HQ \times GQ}{2} - \sqrt{\frac{HQ \times z \times GQ^2}{72} - \frac{z^2.\,GQ^2}{1728}}$$

où z représente la troisième différence de la longueur des ordonnées y_1, y_2, y_3 et y_4.

Cependant cette expression n'est pas juste. En effet on a

$$\begin{aligned} y_1 &= a; \\ y_2 &= a + bh + ch^2 + dh^3, \\ y_3 &= a + 2\,bh + 4\,ch^2 + 8\,dh^3 \text{ et} \\ y_4 &= a + 3\,bh + 9\,ch^2 + 27\,dh^3, \end{aligned}$$

d'où l'on trouve

$$y_4 - 3\,y_3 + 3\,y_2 - y_1 = 6\,dh^3 = z;$$

ensuite

$$a = y_1, \qquad b = \frac{2\,y_4 - 9\,y_3 + 18\,y_2 - 11\,y_1}{6\,h},$$

$$c = \frac{-\,y_4 + 4\,y_3 - 5\,y_2 + 2\,y_1}{2\,h^2} \text{ et } d = \frac{y_4 - 3\,y_3 + 3\,y_2 - y_1}{6\,h^3}.$$

On a maintenant pour l'aire de la première bande de la figure

$$KGHJ = \int_0^h \left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) dx = \frac{h}{24}\left(y_4 - 5\,y_3 + 19\,y_2 + 9\,y_1\right),$$

ainsi pour l'aire GHQ:

$$GHQ = \frac{h}{24}\left(y_4 - 5\,y_3 + 19\,y_2 + 9\,y_1\right) - \frac{24}{24}\,h\,y_1 =$$
$$= \frac{HQ \times GQ}{2} + \frac{z.GQ}{24} - \frac{GQ}{24}\left(2\,y_3 - 4\,y_2 + 2\,y_1\right),$$

d'où il résulte que l'aire n'est pas une fonction uniquement de HQ, GQ et la grandeur constante z, comme cela devrait être le cas si la formule de Gregory était juste.

On trouve ensuite:

$$LFGK = \frac{h}{24}\left(-\,y_4 + 13\,y_3 + 13\,y_2 - y_1\right),$$

$$FGR = \frac{GR \times FR}{2} + \frac{z.FR}{24} - \frac{FR}{24}\left(2\,y_4 - 4\,y_3 + 3\,y_2 - y_1\right),$$

$$MEFL = \frac{h}{24}\left(9\,y_4 + 19\,y_3 - 5\,y_2 + y_1\right) \text{ et}$$

$$EFS = \frac{FS \times ES}{2} + \frac{z.ES}{24} - \frac{ES}{24}\left(4\,y_4 - 10\,y_3 + 8\,y_2 - 2\,y_1\right).$$

En additionnant les aires des trois bandes, il résulte pour l'aire de toute la figure

$$MEHJ = \frac{h}{24}\left\{\begin{array}{rrrr} y_4 - & 5\,y_3 + & 19\,y_2 + & 9\,y_1 \\ -\,y_4 + & 13\,y_3 + & 13\,y_2 - & y_1 \\ +\,9\,y_4 + & 19\,y_3 - & 5\,y_2 + & y_1 \end{array}\right\} =$$
$$= \frac{h}{24}\left(9\,y_4 + 27\,y_3 + 27\,y_2 + 9\,y_1\right),$$

ou, en mettant $3h = H$, on trouve, comme sub (110), sans les termes de correction

$$MEHJ = \frac{H}{8}\left(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4\right).$$

Gregory traite encore les cas où la figure est limitée par une parabole du 4ième ou du 5ième degré et, quoiqu'il ne développe pas les formules de la solution, il en donne cependant l'idée.

§ 93. Enfin parurent la Méthode des Fluxions et le Tractatus de quadratura curvarum de Newton (37). Puis, en 1730, l'ouvrage Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis de l'excellent mathématicien français Abraham de Moivre (1667—1754), qui vivait en Angleterre, et divers écrits de Leibniz (1646—1716), des Bernouilli, et d'autres auteurs.

Cependant, toutes ces recherches — excepté celles de Gregory qui sont traitées dans le paragraphe précédent — avaient pour but de quarrer des figures dont la courbe limite était déterminée par une équation, c'est à dire dont la loi de succession des points était connue.

Newton (1642—1727), peut-être le plus puissant génie géométrique de tous les temps, a été le premier qui ait fait connaître, pour exprimer l'aire approximative de figures curvilignes, un procédé général applicable à toutes les courbes.

§ 94. On peut partager en deux périodes l'histoire de l'invention des méthodes d'approximation que nous avons traitées dans les pages précédentes. Dans la première, ces méthodes sont fondées sur la division de la figure en bandes de même largeur, dans la seconde sur la division de la figure en bandes de largeur inégale.

PREMIÈRE PÉRIODE.

Division de la figure en bandes de même largeur.

§ 95. Déjà dans sa seconde lettre à Leibniz, du 24 octobre 1676 (38), où il traite la quadrature de figures curvilignes au moyen de séries, Newton fait l'observation suivante: »Si »la série n'est pas assez simple, on peut y remédier en tra»çant une courbe par autant de points donnés que l'on désire." Evidemment Newton pensait ici à une quadrature approchée du genre de la règle de Simpson (39).

Dans son œuvre célèbre: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (40), proposition V du tome troisième, Newton posait la question de nouveau en ces termes: »Soit à déterminer la ligne parabolique qui passe »par un nombre arbitraire de points donnés." D'une manière générale, il donne la solution de ce problème et fait ensuite cette observation: »On peut trouver ainsi approximativement »les aires de toutes les courbes; c'est à dire que si l'on a »quelques points d'une courbe arbitraire que l'on veut quarrer, »on suppose qu'une parabole est tracée par ces points. L'aire »de cette dernière courbe sera approximativement égale à »l'aire de la première, et les méthodes, suivant lesquelles on »peut toujours quarrer cette parabole, sont parfaitement »connues". (41)

Cependant il n'achève pas la solution du problème. Il ne le fait pour la première fois que dans un traité particulier qui a pour titre: Methodus differentialis, publié en 1711 par William Jones (1675—1749) avec le consentement de l'auteur (42). Newton traite, dans les propositions III et IV de sa Methodus differentialis, ce problème: »Si une ligne droite est divisée en un nombre arbitraire de »parties égales ou inégales, et si des lignes, parallèles entre »elles, sont élevées sur les points de division — trouver »l'équation de la ligne parabolique qui passe par les sommets »des lignes élevées". Il indique, dans la proposition V, de

quelle manière la longueur de l'ordonnée d'un point arbitraire de cette ligne parabolique peut être exprimée dans les longueurs des ordonnées connues, et, dans la proposition VI, il définit de quelle manière peut être trouvée l'aire approximative d'une figure curviligne dont on ne connaît que quelques points seulement de la courbe limite. Et, pour donner un exemple, il fait connaître, dans la Scholium de la dite proposition IV, la formule qui porte son nom, c'est à dire la formule qui représente l'aire approximative d'une figure curviligne pour quatre ordonnées. Dans l'exemple qu'il donne, Newton suppose que les ordonnées à mesurer divisent la base de la figure en trois parties égales, par conséquent, il fait alors coïncider les deux ordonnées extrêmes de la figure avec les points extrêmes de la courbe limite. Il dit: »Si A est »la somme de la première et de la quatrième, B celle de la »seconde et de la troisième et R la distance entre la pre»mière et la quatrième ordonnée, une nouvelle ordonnée, au »milieu de toutes, sera $\frac{9B-A}{16}$ et l'aire entière entre la »première et la quatrième ordonnée, $\frac{A+3B}{8}.R$."

Dans les propositions III et IV de la Methodus differentialis, Newton a bien indiqué la voie que l'on doit suivre pour développer une formule représentant l'aire approximative I d'une figure limitée par une courbe arbitraire, mais il ne fait pas connaître le calcul à effectuer pour obtenir cette formule. Cependant les propositions III et IV nous mettent en état de déterminer la marche des idées de Newton avec une probabilité qui touche à la certitude.

En effet, posons, de même que le fait Newton dans la formule qu'il donne comme exemple, que 4 points de la courbe limite arbitraire de la figure soient connus, représentons les coordonnées de ces points par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) et (x_4, y_4), la longueur de la base de la figure par R et l'équation de la ligne parabolique par

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

et supposons que l'axe Y coïncide avec l'ordonnée y_1, on

trouve alors, en substituant dans l'équation les valeurs posées des coordonnées, x_1 étant égal à 0, $x_2=\frac{1}{3}R$, $x_3=\frac{2}{3}R$ et $x_4=\frac{3}{3}R$:

$$y_1=A,$$
$$y_2=A+\frac{1}{3}R.B+\frac{1}{9}R^2.C+\frac{1}{27}R^3.D,$$
$$y_3=A+\frac{2}{3}R.B+\frac{4}{9}R^2.C+\frac{8}{27}R^3.D \text{ et}$$
$$y_4=A+\frac{3}{3}R.B+\frac{9}{9}R^2.C+\frac{27}{27}R^3.D;$$

d'où

$$A=y_1,$$
$$B=-\frac{1}{2R}\left(11y_1-18y_2+9y_3-2y_4\right),$$
$$C=\frac{1}{2R^2}\left(2y_1-5y_2+4y_3-y_4\right) \text{ et}$$
$$D=-\frac{1}{2R^3}\left(y_1-3y_2+3y_3-y_4\right).$$

L'équation de la ligne parabolique est donc:

$$y=y_1-\frac{1}{2R}\left(11y_1-18y_2+9y_3-2y_4\right)x+$$
$$+\frac{9}{2R^2}\left(2y_1-5y_2+4y_3-y_4\right)x^2-$$
$$-\frac{9}{2R^3}\left(y_1-3y_2+3y_3-y_4\right)x^3.$$

Si nous posons ici $x=\frac{1}{2}R$, nous trouvons, pour la longueur de l'ordonnée au milieu de la figure,

$$y=\frac{1}{16}\left\{9(y_2+y_3)-(y_1+y_4)\right\},$$

ou, en posant $(y_1+y_4)=A$ et $(y_2+y_3)=B$,

$$y=\frac{9B-A}{16}$$

comme Newton l'a trouvé.

Pour l'aire approximative I de la figure, nous trouvons d'après

$$I=\int_0^R y\,dx$$

comme Newton:

$$I=\frac{A+3B}{8}R.$$

Pour faciliter le calcul de l'aire de figures curvilignes, Newton recommande dans la même Scholium de composer des tables de formules, calculées pour d'autres valeurs encore que de $n=4$, dans le sens de la formule que lui-même a donnée pour $n=4$ ordonnées, et il fait connaître des expédients pour réduire le calcul de l'aire d'une figure curviligne dont un grand nombre d'ordonnées sont connues, au calcul avec un nombre plus petit d'ordonnées. C'est à dire qu'il fait l'observation suivante: »Si les ordonnées appartiennent »à des intervalles égaux des abscisses et si l'on prend les »sommes des ordonnées qui se trouvent à des côtés différents »de l'ordonnée du milieu et qui en sont éloignées à des »distances égales, et le double de l'ordonnée du milieu, il se »présente une seconde courbe dont l'aire est définie par un »nombre plus petit d'ordonnées et qui est égale à celle »limitée par la première courbe. De plus, si l'on prend pour »les nouvelles ordonnées la somme de la première et de la »seconde, et la somme de la troisième et de la quatrième, »et la somme de la cinquième et de la sixième et ainsi de »suite, ou si l'on prend la somme des trois premières ordon»nées et la somme des trois qui suivent directement, et la »somme des trois qui suivent directement ces dernières, ou »si l'on prend les sommes de chaque nombre de quatre »ordonnées, ou de cinq, l'aire limitée par la seconde courbe »sera égale à celle limitée par la première. — Et puisque »c'est la même chose pour chaque nombre arbitraire d'ordon»nées d'une figure curviligne dont il faut déterminer l'aire, »le calcul pourra être réduit à celui de l'aire d'une autre »figure avec un nombre plus petit d'ordonnées connues".

Probablement, Newton avait ici en vue toute une série de formules du genre de celle de Simpson, dans lesquelles la

vraie courbe limite de la figure est remplacée par une ligne brisée composée de portions de paraboles du 2ème, 3ème, 4ème degré, etc. (Voyez les §§ 4 et 5 et la note b à la page 89 de cette étude).

§ 96. Cotes (1682—1716) qui, sans se douter des recherches de Newton sur ce sujet, en avait déjà fait de pareilles en 1707, et les avait communiquées dans ses lectures en 1709 (43), fut porté, par la forme élégante dans laquelle Newton avait donné la formule pour la valeur approchée d'une figure curviligne pour quatre ordonnées connues, à étendre les formules jusqu'au nombre de 11 ordonnées. Il fait se succéder les longueurs des abscisses, qui appartiennent aux ordonnées à mesurer, d'après une suite arithmétique du premier ordre, de telle manière que la première et la dernière ordonnée à mesurer coïncident avec les points extrêmes de la courbe limite.

On trouve ces formules, sans démonstration cependant, dans une table, à la fin de son traité: De Methodo differentiali Newtoniana, qui ordinairement fait partie — avec d'autres traités encore — de sa Harmonia mensurarum, Cantabrigiae, 1722 (44), publiée après sa mort. Il est très probable, presque certain même, que Cotes, dans le développement de ses formules, a suivi la voie indiquée par Newton dans la composition de sa formule pour 4 ordonnées et détaillée ci-dessus à la page 159.

Les coefficients numériques, dans les formules données par Cotes pour $n = 3$ jusqu'à $n = 11$, sont absolument les mêmes que ceux des formules de la table A qui se trouve à la fin de cette étude, si l'on rejette dans cette table les termes de correction.

§ 97. Stirling (1696—1770), dans sa Methodus Differentialis, Londres, 1730 (45), s'est occupé du même sujet. Lui aussi fait croître les abscisses des ordonnées à mesurer avec des différences égales et coïncider la première et la dernière de ces ordonnées avec les points extrêmes de la courbe limite

de la figure. Il place l'axe Y dans la première ordonnée extrême de la figure et, à la page 6 de son ouvrage, il représente l'abscisse d'un point connu de la courbe par z, l'ordonnée de ce point par y et la valeur de y par l'équation

$$y = A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2) + \\ + Ez(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots$$

Les coefficients qui s'offrent, dans la valeur admise de y, sont entièrement déterminés puisque en substituant les $(n+1)$ abscisses $z = 0, 1, 2, \ldots. n$ qui appartiennent aux valeurs consécutives de y, on obtient autant d'équations du premier degré pour la détermination des coefficients inconnus qui peuvent être exprimés sous la forme de fonctions linéaires des $(n+1)$ ordonnées, de sorte qu'on trouve aisément une équation de la forme

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{etc.}$$

dans laquelle a_0, a_1, a_2, a_3, etc. représentent des valeurs numériques.

A la page 146 de sa Methodus, il donne les formules pour l'aire I de la figure, seulement pour les nombres impairs de n, c'est à dire pour 3, 5, 7 et 9 ordonnées. Mais en ceci il va plus loin que Newton et Cotes ne l'ont fait. Notamment il est le premier qui a fait connaître le moyen d'augmenter l'exactitude de la valeur approchée d'une intégrale, en ajoutant à chacune des formules pour $n = 3$, 5, 7 et 9 ordonnées à mesurer un terme auxiliaire (46) qui indique la différence entre la valeur de I, calculée pour le nombre $2m + 1 = n$ d'ordonnées, et la valeur plus exacte que l'on obtient en augmentant ce nombre de deux encore.

Stirling n'a pas non plus fait connaître de quelle façon il a effectué le développement de ses formules d'approximation et des termes auxiliaires qui s'y rattachent. Il y a lieu de présumer cependant que lui aussi a suivi la méthode indiquée par Newton et traitée plus amplement dans les §§ 63—66 et à la page 159 de cette étude.

En outre, il est très probable que Stirling s'est borné aux nombres impairs de n, parce qu'il avait trouvé que les

nombres pairs, quoiqu'ils donnent lieu à des calculs plus étendus, n'augmentent pas sensiblement l'exactitude du résultat.

A la page 147 de sa Methodus, Stirling calcule la valeur approchée de

$$\int_0^{+1} \frac{dz}{1+z}\, l.\, 2\, (= 0{,}6931\ 4718\ 056\ldots),$$

dans le cas de $n = 9$, avec application du terme auxiliaire, et il trouve $l.\, 2 = 0{,}6931\ 4718\ldots$

En effet, quand nous posons, dans $\int_0^{+1} \frac{dz}{1+z}$, $x = \frac{1}{2} + z$, l'intégrale devient $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\frac{3}{2}+x}$, d'où $y = \frac{1}{\frac{3}{2}+x}$.

Si nous calculons comme Stirling la valeur approximative de l'intégrale en appliquant la formule pour $n = 9$ de la table J ci-après, nous trouvons pour $x =$

$$-x_5 = -\frac{4}{8},\ -x_4 = -\frac{3}{8},\ -x_3 = -\frac{2}{8},\ -x_2 = -\frac{1}{8},\ \mp x_1 = 0,$$
$$x_2 = \frac{1}{8},\ x_3 = \frac{2}{8},\ x_4 = \frac{3}{8} \text{ et } x_5 = \frac{4}{8};$$

et pour $y_{\mp p}$:

$$y_{-5} = \frac{8}{8},\ y_{-4} = \frac{8}{9},\ y_{-3} = \frac{8}{10},\ y_{-2} = \frac{8}{11},\ y_{\mp 1} = \frac{8}{12},$$
$$y_2 = \frac{8}{13},\ y_3 = \frac{8}{14},\ y_4 = \frac{8}{15} \text{ et } y_5 = \frac{8}{16};$$

par conséquent, pour la valeur approximative de l'intégrale sans terme auxiliaire

$$\frac{8}{28350}\left\{-4540 \cdot \frac{1}{12} + 10496\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) - 928\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{14}\right) + \right.$$
$$\left. + 5888\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{15}\right) + 989\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)\right\} = 0{,}6931\ 4721\ 45\ldots.$$

Puis, pour calculer la valeur du terme auxiliaire, nous avons pour $x_6 = \frac{5}{8}$: $y_{-6} = \frac{8}{7}$ et $y_{+6} = \frac{8}{17}$, par conséquent

$$\text{corr:} = \frac{296}{467775} \cdot 8 \left\{252 \cdot \frac{1}{12} - 210\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right) + \right.$$

$$\left. + 120\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{14}\right) - 45\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{15}\right) + 10\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) - \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{17}\right)\right\} =$$

$$= 0{,}0000\ 0003\ 71\ldots,$$

ce qui donne pour la valeur plus exacte de l'intégrale approchée: 0,6931 4718..., comme Stirling l'a trouvé aussi.

§ 98. Si Newton et Cotes ont les premiers trouvé la méthode d'approximation de l'aire de figures curvilignes au moyen de formules qui valent pour chaque courbe limite arbitraire, et, si Stirling a été le premier qui ait fait connaître le moyen d'augmenter l'exactitude du calcul, Euler (1707—1783) et MacLaurin (1698—1746) étendent encore considérablement l'approximation et donnent des formules dont on se sert encore le plus à présent. Ils sont les premiers qui aient montré clairement le développement des formules d'approximation qu'ils traitent et des termes de correction qui y appartiennent.

MacLaurin fut un des premiers et des plus actifs promoteurs des nouveaux calculs de Newton. »Berkeley (1685—»1753) Evêque de Cloyne, ayant, à l'occasion de quelques »disputes qui s'étaient élevées au sujet des fondements de la »Méthode des Fluxions, rejeté la méthode elle-même »dans un traité intitulé l'Analyste, publié en 1734, et en »même temps accusé les mathématiciens d'infidélité en ma»tière de religion; M. MacLaurin jugea qu'il était nécessaire »de défendre son étude favorite et de repousser une accusation »dans laquelle il se trouvait si injustement compris. Il com»mença une réponse au livre de l'évêque; mais, à mesure »qu'il avançait, il fit un si grand nombre de découvertes, »trouva tant de nouvelles théories, et résolut tant de pro»blèmes curieux, qu'au lieu d'être une pièce justificative son »ouvrage forma un Traité complet des fluxions, avec leurs »applications aux plus importants problèmes de géométrie »et de physique". (47)

Dans ce traité célèbre: A Treatise of fluxions. In two books. Edimbourg, 1742, Livre second, Chap. IV, MacLaurin traite deux méthodes d'approximation de l'aire de figures curvilignes. Dans chacune de ces méthodes, il suppose que la figure est divisée en bandes de même largeur. Dans la première méthode il suppose que les deux ordonnées limites de chaque bande, par conséquent aussi les deux ordonnées limites de la figure, sont connues. Dans la seconde méthode, c'est seulement l'ordonnée médiane de chaque bande qui doit être mise en compte. Il indique non seulement comment on peut calculer pour chaque valeur de n, l'aire approximative I, mais il fait connaître aussi l'erreur de l'approximation, non pas, comme le fait Stirling, par un seul terme auxiliaire, mais par une suite de termes de correction. Ainsi, il nous met en état de rendre la différence entre l'aire exacte I' et l'aire approximative I d'une figure curviligne arbitraire aussi petite que nous pouvons le désirer.

Si l'on ouvre le second Livre du Treatise à l'art. 830, on y trouve l'importante formule citée sub (114) de cette étude (48), dont MacLaurin déduit plusieurs autres formules, entre autre à l'art. 848 la formule (116), dite la première formule de MacLaurin, la formule (118) de Simpson et la formule (119) de Newton, respectivement pour 3 et 4 ordonnées, et à l'art. 832 la formule sub (129), dite la seconde formule de MacLaurin; toutes ces formules accompagnées de leurs termes de correction (49).

Relativement à cette formule (114) nous ferons observer que c'est Euler qui l'a donnée, sans démonstration, le premier, à la page 69 des Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis, Tome VI, de 1732 et 1733, publiés à Saint-Pétersbourg en 1738. Il est certain cependant — nous le ferons voir à la page $^{171}/_{172}$ — que cette formule d'Euler était connue en Angleterre déjà en 1737 et probablement bien avant cette date.

Euler propose: Si s est la somme des n membres d'une série et t le dernier membre, qui, naturellement, comme s, est dépendant de n, on a

$$t=\frac{ds}{1.dn}-\frac{d^2s}{1.2.dn^2}+\frac{d^3s}{1.2.3.dn^3}-\frac{d^4s}{1.2.3.4.dn^4}+\text{ etc.}$$

et

$$s=\int t.dn+\alpha t+\frac{\beta.dt}{dn}+\frac{\gamma.d^2t}{dn^2}+\frac{\delta.d^3t}{dn^3}+\text{ etc.}$$

où les coefficients α, β, γ, δ, etc. ont les valeurs suivantes:

$$\alpha=\frac{1}{2};\quad \beta=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2.3};\quad \gamma=\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2.3}+\frac{1}{2.3.4};$$

$$\delta=\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2.3}+\frac{\alpha}{2.3.4}-\frac{1}{2.3.4.5};$$

$$\Sigma=\frac{\delta}{2}-\frac{\gamma}{2.3}+\frac{\beta}{2.3.4}-\frac{\alpha}{2.3.4.5}+\frac{1}{2.3.4.5.6};$$

etc., de sorte qu'on a

$$s=\int t\,dn+\frac{t}{2}+\frac{dt}{12\,dn}+\frac{d^3t}{720\,dn^3}+\frac{d^5t}{30240\,dn^5}+\text{ etc.}$$

Il revenait à ces formules au Tome VIII, pag. 9—22, des Comment. Petropol. de 1736, publiés en 1741, et donnait, dans le § 19, la formule (114), comme nous l'avons développée ci-dessus. —

On se demande si MacLaurin a trouvé la formule (114) lui-même, ou s'il s'est servi pour la trouver des notions qui avaient été données dans les volumes VI et VIII des Comment. Petropol. concernant ce sujet.

Selon l'opinion de quelques mathématiciens, MacLaurin a trouvé cette formule indépendamment d'Euler (50). D'autres mathématiciens vont plus loin et admettent qu'Euler a copié la formule (114) en son entier ou en partie sur MacLaurin (51).

Par rapport à la première de ces opinions, il y a lieu d'observer ce qui suit:

Il ressort de ce que MacLaurin lui-même a dit dans la préface du Treatise, comme aussi de l'affirmation de Murdoch (52), que MacLaurin employait tout le temps dont il pouvait disposer librement à son Treatise, et que cet ouvrage s'est étendu petit à petit. Or, Mac-Laurin cite, dans

le Treatise, plusieurs ouvrages dont il n'a pu prendre connaissance que très tard, notamment

dans la Préface, à la pag. III et dans l'art. 369, Cor. III: John Colson, Sir Isaac Newton's Method of Fluxions, translated from the Autor's Latin Original not yet made publick, London, 1736;

dans les arts. 523 et 536: Comment. Petropol. Tome V, imprimé à Saint-Pétersbourg en 1738;

dans les arts. 661 et 664: de Mairan, Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1735. Avec les mémoires de Mathématique et de Physique, Paris, Impr. 1738, pag. 203;

dans les arts. 664, 665 et 666: De Maupertuis, La Figure de la Terre déterminée par les observations au cercle polaire, Paris 1738;

dans l'art. 905: Clairant, l'art 449 des Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Abridged, Vol. VIII, pag. 207) imprimé en 1738 et

dans l'art. 906: Daniel Bernouilli, Traité d'Hydrodynamique, publié en 1738 à Strasbourg.

En considérant que dans ce temps-là l'expédition des livres se faisait très lentement et que MacLaurin a dû employer beaucoup de temps à la lecture des ouvrages qu'il cite et à ceux, plus nombreux encore, qu'il ne cite pas et qu'ensuite l'application de ce qu'il avait trouvé de remarquable exigeait quelque temps, on peut déjà en conclure que le premier volume (qui va jusqu'à l'art. 697) ne put, en aucune manière, être prêt pour l'impression qu'après **1738**.

MacLaurin s'est encore occupé après **1740** à travailler au second volume du Treatise, à le corriger et à l'étendre (entre autre les arts. 900 et les suivants). Cela est prouvé par un passage de la pag. 673 des Phil. Transact., où il est dit: »L'attraction d'une sphéroïde à l'équateur, comme »aux pôles, est déterminée, dans le second volume, d'une ma»nière plus générale que dans le premier, ou que dans une »note de l'auteur publiée à Paris en **1740**". Relativement à cette pièce, Murdoch fait l'observation suivante: »L'Académie »Royale des Sciences lui adjugea, en 1740, un prix qui lui

»fait un honneur infini, pour avoir expliqué le flux et le »reflux de la mer par la théorie de la gravité; question qui »avait été mise au concours l'année précédente (donc en »1739) sans qu'on y eût satisfait. Il n'eut que dix jours de temps »pour travailler à ce mémoire, et il ne put trouver le loisir de le »transcrire avec exactitude, de sorte que l'édition de Paris »n'est pas correcte; mais il revit cette dissertation dans la »suite et l'inséra (au plus tôt en 1740) dans son Traité »des Fluxions (53)".

La citation dans l'art. 898 du Treatise concerne un traité de Murdoch: Mercators sailing, applied to the true Figure of the Earth; with an Introduction etc. London, 1741. Il existe une traduction de cet ouvrage: Nouvelles tables loxodromiques, ou application de la théorie de la véritable figure de la terre à la construction des cartes marines réduites, par M. Murdoch. Traduit de l'anglais par M. de Brémond. Paris, 1742. A la prière de Murdoch, on a ajouté à la page 104 de cette traduction une observation qui commence ainsi: »Lorsque je travaillais à ces cal»culs, il y a trois ans, je me contentais de la solution pré»cédente; mais je sentais qu'il s'en fallait bien qu'elle eût »cette élégance que l'on apprécie tant dans la solution d'un »problème.

»Aussitôt que mon essai parut, M. MacLaurin eut la »bonté de m'avertir de ce défaut, et il me communiqua une »règle qui vaut infiniment mieux que la mienne; en voici »la substance, car je n'ai pas conservé la lettre...."

On lit encore, dans les Remarques Préliminaires de la traduction de Mercators sailing à la page 35: »..... l'on espère trouver encore dans son grand ouvrage »sur la Méthode des Fluxions, qui doit bientôt paraître des »éclaircissements sur ce qui regarde la Figure de la Terre".

Il paraît suffisamment établi, par ces citations, qu'en 1741, au moment de l'apparition du traité de Murdoch, le Treatise n'était pas encore imprimé. La formule d'Euler cependant, quoiqu'elle ne fût publiée qu'en 1738 au Tome VI des Comment. Petropol., était connue en Angleterre certai-

nement en 1737 et très probablement déjà avant cette date, comme nous le voyons dans la dernière phrase de la note, à l'art. 853 du Treatise (54).

Certainement MacLaurin a étudié les tomes I—V des Comment. Petropol. avant la mise sous presse du tome II du Treatise. En effet, dans les art.s 523, 536, 544, 570, 826, 853 et 906 de son ouvrage, MacLaurin les cite comme des sources où il a puisé. Il ne fait pas mention du tome VI, mais les tomes V et VI — dans le dernier desquels se trouve la formule (114) d'Euler — ont paru tous les deux en même temps, c'est à dire en 1738.

Nous ne pouvons pas douter un instant que MacLaurin, ayant trouvé beaucoup de choses utiles pour son ouvrage dans les cinq premiers volumes des Comment. Petropol., spécialement dans le tome V, n'ait examiné aussi les tomes V et VI en même temps. Aussi est-il bien étonnant que ce tome VI ne soit pas mentionné une seule fois dans le Treatise. Il paraît résulter des citations nombreuses du Treatise, d'une déclaration de l'auteur lui-même et d'une autre de son ami Murdoch (55), que MacLaurin lisait tout ce que publiaient les bons auteurs qui traitaient les mêmes sujets que lui. Il est donc certain qu' Euler, dont l'ouvrage: Mechanica sive motus scientia analytica exposita, impr. en 1736, est cité par MacLaurin dans l'avant-dernier alinéa de la préface de son Treatice, n'a pas échappé à ses laborieuses recherches. Cela est d'autant mieux prouvé que MacLaurin, dans cette préface, dit très explicitement qu'Euler a déjà fait la démonstration du problème dont il s'occupe à l'art. 480 du Treatise. Un coup d'œil dans l'Index du tome VI des Comment. Petropol. aurait fixé l'attention de MacLaurin sur la composition d'Euler et lui aurait montré aussitôt la ressemblance de leurs formules. Cette conformité frappe immédiatement parce que dans ces deux formules, qui ne sont pas étendues et par conséquent faciles à comparer, se trouvent les coefficients numériques aussi frappants que remarquables $+\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{720}$ et $+\frac{1}{30240}$.

A la deuxième page de sa préface, MacLaurin dit: »Dans mon premier essai, je me bornai à démontrer les principaux cas des propositions contenues dans les quatre premiers chapitres du premier livre et dans le premier chapitre du second livre de ce traité, à peu près de la même manière qu'on les trouvera démontrés. Mais ceux à qui je communiquai ces premières feuilles, me firent observer qu'il serait à propos d'appliquer la même méthode de démonstration aux autres branches de cette théorie et d'adopter un plan plus général". Je n'ai pas réussi à découvrir si ce premier essai a été imprimé, mais en tout cas s'il l'a été, ce ne peut être que peu de temps avant 1737, attendu que l'*Analyste* parut en 1734.

A propos de ce premier essai, je me permets de faire observer que, dans les quatre premiers chapitres du premier livre (art.s 1—139) et dans le premier chapitre du second livre (art.s 697—722), c'est à dire dans le premier essai, il n'était nullement question du développement des formules qui ont une relation directe avec la formule d'Euler sub (114). Les théorèmes sur lesquels cette formule est fondée apparaissent dans le premier volume au chapitre X, art. 352 (pag. 292 et les suivants) et l'on en trouve l'application dans le second volume à l'art. 812 du chapitre IV, l'avant-dernier chapitre de l'ouvrage complet. On peut conclure de tout cela que la formule (114) n'a pas été comprise dans le plan du *Treatise* avant 1737; par conséquent la formule d'Euler a été introduite dans le *Treatise* après qu'elle était déjà connue en Angleterre.

Il existe un compte-rendu du *Treatise of fluxions* aux nos 468 et 469 des *Phil. Transact.* de 1742—1743 où, à la page 671, on mentionne un traité d'Euler qui se trouve dans le tome VII des *Comment. Petropol.* Ce compte-rendu a été écrit apparemment par MacLaurin lui-même (56). Mais en admettant même qu'un autre l'ait écrit, on peut supposer cependant que le rapport a été lu par MacLaurin (57) et il est assez surprenant qu'il se laissât attribuer sans protestation l'honneur d'avoir découvert la formule (114) d'Euler. Au lieu que, dans ce compte-rendu,

la formule (114) soit attribuée à Euler, ou que du moins Euler soit cité à propos de sa découverte, son nom y est complètement omis; pas un seul mot n'est dit au sujet du tome VI des Comment. Petropol.; au contraire l'auteur du compte-rendu donne à entendre assez clairement que l'honneur de l'invention de la formule dont il est question ici appartient à MacLaurin. En effet, on lit dans ce compte-rendu (pag. 671): »Les séries développées par les moyens »usités pour la détermination de l'aire ou de la fluxion »convergent si lentement quelquefois qu'elles sont de peu »d'utilité ou ne peuvent point du tout nous servir sans quelque »artifice. Par exemple, la somme des 1000 premiers termes »de la série de Lord Brouncker, pour le logarithme de 2, »est inexacte à partir de la 5ème décimale. Pour éclairer plus »complètement sa méthode, l'auteur nous fait voir comment »ou peut remédier à cette difficulté notamment, en plusieurs »cas, par des théorèmes dérivés de la méthode des fluxions »elles-mêmes et qui peuvent nous servir à l'approximation »facile des valeurs des séries et à la solution de problèmes »pour lesquelles on a ordinairement recours à d'autres mé»thodes. Ces théorèmes ont été donnés dans le premier vo»lume, art. 352, etc., mais la démonstration et les exemples »sont placés ici, parce qu'ils exigeaient beaucoup de cal»culs (58). Supposons que la base soit égale à l'unité et »qu'ainsi ses fluxions soient égales à l'unité, que la demi»somme des ordonnées extrêmes soit représentée par a, la »différence des premières fluxions de ces ordonnées par b, la »différence de leurs fluxions 3me, 5me, 7me, et alternative»ment plus élévées par c, d, e, etc., alors l'aire sera égale à

$$»a - \frac{b}{12} + \frac{c}{720} - \frac{d}{30240} + \frac{e}{120\ 9600} - \text{etc.},$$

»ce qui est le premier théorème pour trouver l'aire......"

Nulle part MacLaurin ne désigne Euler comme étant celui qui, le premier, a découvert la formule (114); seulement il dit, comme en passant, dans une note, à l'art. 853 du Treatise: »Je profite de l'occasion pour signaler qu'en »1737, ayant montré fortuitement les pages 292 et 293 de

»ce traité (après leur impression) à M. Stirling, il me fit »observer qu'un théorème analogue au premier de ceux décrits »dans l'art. 352 lui avait été communiqué par M. Euler". (54)

A la page III de la préface du Treatise, il est dit aussi: »La plus grande partie du premier volume était im»primée en 1737". Or, le premier volume conprend les pages 1—574, le second les pages 575—754. L'Analyste parut en 1734, le Treatise en 1742. Le premier volume contient les bases et le développement de théorèmes, tandis que dans le second volume on trouve en partie l'application, plus facile en général, de ces théorèmes. Ainsi la plus grande partie du premier volume, et, sans doute, une partie considérable du second, formant ensemble les $\frac{3}{4}$ environ de l'ouvrage tout entier, auraient été achevées dès 1737, de sorte que cinq années environ auraient été employées à finir et à imprimer le dernier quart de l'ouvrage. Ce temps paraît démesurément long si on songe que MacLaurin a travaillé continuellement au Treatise et n'a eu besoin que de dix jours pour écrire le Traité sur le Flux et Reflux de la Mer. Aussi est-on amené à se demander pourquoi MacLaurin se serait si fort pressé de faire imprimer la plus grande partie du premier volume, tandis qu'il aurait consacré cinq ans à l'impression du second volume. Doit-on croire que le premier essai ait été imprimé en 1736 ou 1737 et ait fait partie du Treatise? Cependant nous avons fait voir que l'art. 352 du Treatise n'a pas pu se trouver dans ce premier essai et doit donc avoir été ajouté plus tard. —

Plusieurs fois MacLaurin a publié des formules et des méthodes découvertes fortuitement quelque temps auparavant par d'autres. Cela est arrivé, entre autre, avec le problème dont il est question dans l'art. 480 du Treatise et dans un cas qui donna lieu à une dispute entre lui-même et le révérend Braikenridge (59).

En 1729 déjà, MacLaurin (60), dans une lettre à Martin Folkes (1690—1754), avait annoncé qu'il se proposait de publier un traité d'algèbre. MacLaurin mourut en 1746, à

l'âge de 48 ans, sans avoir exécuté son projet; ses papiers scientifiques furent examinés et l'on en tira en 1748: *A treatise of algebra, in three parts containing* — etc. qui fut imprimé. Or, il se trouve, dans ce traité, une démonstration du parallélogramme de Newton, laquelle, dans ses principes, a beaucoup de rapport avec celle de Kästner (1719—1800) dans son ouvrage: *Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series*, imprimé en 1743. Au sujet de cette ressemblance, Cantor dit: »Cependant »nous ne sommes nullement d'avis qu'il en faille tirer la »conséquence que MacLaurin ait connu le traité de Kästner. »Au contraire, nous sommes parfaitement convaincu de son »ignorance de ce traité".

A la page V de la préface de ses *Mathematical dissertations on a variety of physical and analytical subjects*, Londres, 1743, Simpson fait l'observation suivante: »La première partie, qui est une des plus intéres»santes de tout l'ouvrage, démontre scientifiquement quelle »forme une planète, ou un corps fluide homogène, doit prendre »par suite de sa rotation autour d'un axe. Non seulement ce »problème est traité d'une façon générale, mais on trouve »aussi la démonstration pour des cas particuliers relatifs à »un temps de rotation donné quelconque. Dans cette démon»stration il est prouvé que . . . , avec plusieurs autres parti»cularités sur lesquelles personne encore n'a attiré l'attention. »Il faut reconnaître que, lorsque j'ai publié cette démonstra»tion, le monde savant a été singulièrement surpris de ce »que le fameux mathématicien M. MacLaurin avait démontré »plusieurs des mêmes choses. Mais ce que je présente ici a »été lu devant la Société Royale (61) et la plus grande »partie du présent ouvrage était imprimée plusieurs mois »avant la publication du livre de ce savant monsieur". Cependant il n'est pas fait mention du nom de Simpson dans le *Treatise*. Faut-il supposer que le *Treatise* de MacLaurin de 1742 ait été antidaté? —

Il me semble que, de tout ce que nous venons de signaler d'inexplicable et d'étrange, on peut tirer la preuve que MacLaurin a voulu faire mystère, entre autre, de la formule (114)

d'Euler. Selon mon humble avis, il ne peut pas être question ici de priorité mais de plagiat. En tout cas, il est absolument certain que l'honneur de l'invention de la formule importante sub (114) de cette étude, appartient complètement et uniquement à Euler et qu'ainsi il est incontestablement juste que cette formule porte son nom et son nom seul.

§ 99. Euler a donné encore la formule (106). Elle est développée dans l'ouvrage de cet éminent mathématicien à la page 221 de son Inst. Calc. Int. En supposant l'aire précédant l'ordonnée $A' A$ de la figure 1 de cette étude égale à b, il en résulte que la formule indiquée dans l'Inst. (après qu'on y aura changé α^6 et α^7 respectivement en α^5 et α^6) est parfaitement la même que celle sub (106) (62).

§ 100. Dans sa Mathematical dissertations on a variety of physical and analytical subjects. Londres, 1743, pag. 109—119, Simpson (1710—1761) développe la formule (sans y ajouter des termes de correction) qui porte son nom, et donne plusieurs exemples de son application. A la page VII de la préface, il fait observer: »Cette »méthode était originairement une invention de Sir Isaac »Newton, continuée depuis par M. de Moivre, M. Stirling, »et d'autres. Cependant, comme je ne prétends ici à rien »qu'à la liberté de traiter le sujet de la manière qui me »paraît la plus claire et la plus satisfaisante pour le lecteur, »je ne vois pas pourquoi je n'aurais pas le même privilège »que d'autres".

La voie suivie par Simpson dans le développement de sa formule est précisément la même que celle que nous avons indiquée ci-dessus, dans le § 4. C'est à dire (pag. 109 de ses Math. diss.) que Simpson divise la base de la figure curviligne en $2m$ parties égales $= h$ et élève les ordonnées Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, etc. sur les points de division B, C, D, E, etc. et sur les points extrêmes A et X de cette base, étant a, b, c, d, e, etc. les points où ces ordonnées passent par la courbe limite. La figure est divisée ainsi en $2m$ bandes de même largeur. Il calcule l'aire des deux premières bandes ensemble,

en supposant, comme Newton l'a indiqué, que la partie de la courbe limite, qui se trouve entre $A a$ et $C c$, est remplacée par une portion d'une parabole du second degré, et il trouve, pour cette aire, comme Cotes et Stirling avaient déjà trouvé avant lui: $h(Aa + 4Bb + Cc)$. Ensuite Simpson fait remarquer (pag. 110) que l'aire du reste de la figure peut aussi être déterminée approximativement de la même manière, et que, par conséquent, l'aire des deux bandes suivantes est à peu près égale à $h(Cc + 4Dd + Ee)$; celle des deux bandes qui suivent ces dernières à $h(Ee + 4Ff + Gg)$; etc. En additionnant les aires approximatives de toutes les bandes, il trouve l'aire approchée de toute la figure exprimée par une formule comme celle qui est développée ci-dessus, dans le § 4.

La formule de Simpson n'était point la plus importante de ses découvertes et elle était nouvelle seulement comme application très utile d'une formule qui, déjà en 1709, avait été communiquée par Cotes (pour $n = 3$; voyez aussi § 92 et le dernier alinéa du § 95).

§ 101. Outre les formules d'approximation dont il a été question ci-dessus, il y en a encore d'autres dans lesquelles la base de la figure est supposée aussi divisée en parties égales et où l'aire de la figure est exprimée en fonction d'ordonnées à mesurer et en termes de correction dont les coefficients diffèrent cependant de ceux des formules trouvées ci-dessus. Mais on peut toujours déduire ces formules de celles développées dans cette étude.

Si l'on prend, par exemple, la formule de Legendre (1752—1833) développée dans son **Traité des Fonctions elliptiques**, Paris, 1826, Tome II, pag. 577, sub (6), on la retrouve par l'addition de la formule (114) au double de celle sub (129) de cette étude, en y représentant

$$\frac{1}{2}\left(y_1 + y_n\right) + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} \text{ par } M,$$
$$y'_1 + y'_2 + y'_3 + \ldots + y'_n \text{ par } N$$

et la distance h des deux ordonnées consécutives y_p et y_{p+1}

ou des deux ordonnées consécutives y'_p et y'_{p+1} par α. On trouve alors, de même que Legendre,

$$I' = \frac{\alpha}{3}\left(2\,N + M\right) - \frac{\alpha^4}{2880}\,F_3 + \text{etc.}$$

Si l'on indique la distance de y_p à y'_p, c'est à dire $\frac{1}{2}\alpha = h$, on retrouve, en négligeant les termes de correction, la formule de Simpson sub (2) de cette étude-ci.

SECONDE PÉRIODE.

Division de la figure en bandes de largeur inégale.

§ 102. En 1814, le célèbre Gauss (1777—1855) fit connaître la méthode d'approximation qui porte son nom (63). Son élève Encke (1791—1865) fait l'observation suivante sur le développement donné par Gauss à sa propre méthode, et sur cette méthode elle-même (64).

»Gauss parvient à ses résultats au moyen d'une induction »difficile généralisée par la méthode dite de Kästner, méthode »dans laquelle il démontre que si une équation convient au »nombre n, elle convient aussi au nombre $n + 1$. Ainsi une »démonstration directe était très désirable et la grande »simplicité et l'élégance des résultats de Gauss faisait présu»mer la possibilité d'une démonstration simple. Jacobi en fit, »dans le Journal de Crelle pour la mathématique abstraite »et appliquée (1826), tome premier, page 301, connaître une »qui était si simple et, l'on pourrait dire dérivée si directe»ment de la nature du problème, qu'il faut la considérer »sans hésitation comme la démonstration cherchée.

»Gauss s'était probablement flatté que son mode d'inté»gration aurait plus de succès qu'il n'en a rencontré dans la »suite. Au temps où j'étudiais sous sa direction, il était occupé »de son traité; il m'en confiait, pour en faire une copie, les

»feuilles manuscrites que je garde encore comme un souvenir »de grande valeur. Peut-être le calcul des déviations de »Pallas, auquel, dans ce temps-là, il travaillait avec beaucoup »de zèle, avait-il quelque rapport avec ces recherches? Autant »qu'il m'est permis de le croire, il ne s'est pas servi plus »tard de sa méthode d'approximation ce qui n'est pas difficile »à expliquer d'ailleurs (65), car, en général, l'application de »cette méthode ne peut se faire que très rarement quand il »s'agit de fonctions qui comprennent des périodes étendues. »Seulement dans le calcul de la valeur numérique d'une »intégrale parfaitement définie, calcul qui ne peut être effectué »que très difficilement d'une autre manière, on pourra appli- »quer cette méthode avec succès, comme Gauss lui-même l'a »fait voir dans son traité, avec l'intégration de

$$» \int \frac{dx}{log\, \partial}$$

»de $x = 100\,000$ jusqu'à $x = 200\,000$, qu'il exécute en »manière d'exemple.

»L'induction difficile par laquelle Gauss (66) parvient à »ses résultats, il l'applique aussi dans la section première, »où il développe les expressions de Cotes pour des ordonnées »qui appartiennent à des intervalles égaux des abscisses, et »spécialement là où il détermine le degré d'exactitude auquel »on peut s'attendre avec chaque nombre d'ordonnées qu'on »adopte".

§ 103. Plus tard, plusieurs mathématiciens (67) sont parvenus, au moyen d'une démonstration beaucoup plus simple et plus facile à suivre, aux mêmes résultats que Gauss. Nous indiquons, par exemple, la démonstration courte et élégante qui se trouve dans le Traité de calcul intégral par J. Bertrand, Paris, 1870, pag. 339.

D'autres mathématiciens ont généralisé la méthode de Gauss. Ainsi Lobatto qui, dans son ouvrage Lessen over de Integraal-Rekening, La Haye, 1852, §§ 207—210 propose, lorsqu'on se sert de $2m + 1$ ordonnées à mesurer, de

mettre aussi en compte les deux ordonnées limites et l'ordonnée médiane, qui correspondent avec $x_1 = 0$ et $x_{\mp m} = \mp \frac{1}{2}$, et il donne les formules nécessaires à cette fin. Christoffel fait connaître, en 1858, dans le volume 55 du Journal de Crelle (Borchardt), pag. 61—82, une méthode (68) pour le calcul de la valeur approximative de l'intégrale $\int_g^h \Phi(x)\, dx$, si la condition est posée que les ordonnées de m abscisses $x_1, x_2, \ldots x_m$, prises arbitrairement, sont connues et qu'il faut calculer encore n abscisses $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$, dont les coordonnées, jointes à ces m ordonnées, doivent faire connaître la valeur approximative de l'intégrale pour ces $(m + n)$ ordonnées aussi exactement que possible.

§ 104. Dans la suite on a trouvé de nouvelles formules dont les plus importantes sont celles d'Hermite-Tchebichef (69), tandis que celles qui existaient déjà sont développées suivant des règles plus simples (70).

Nous ferons observer ici que, dans le premier chapitre de cette étude, nous avons énoncé une règle qui semble surpasser par sa simplicité et sa facilité de généralisation toutes celles données jusqu'à présent.

De cette règle générale, on peut déduire, d'une façon très aisée, non seulement les formules de Newton-Cotes, MacLaurin, Gauss, etc. mais encore toute formule d'approximation devant satisfaire à des conditions spéciales et qui, dans un cas donné (71), peut être préférable à n'importe quelle autre formule connue.

Nous croyons que, grâce à cette règle, l'approximation de l'aire de figures curvilignes, passe des hautes mathématiques aux mathématiques inférieures.

Notes [1]).

(1) Voyez: Thomas Simpson. **Essays on several Curious and Useful Subjets, In Speculative and Mix'd Mathematicks**, pag. 102, ou J. Bertrand. **Traité de Calcul différentiel.** § 348.

(2) Soit donnée, par exemple, l'expression

$$I = H\left\{0,36.\frac{y_{-1}+y_{+1}}{2}+0,32.\frac{y_{-2}+y_{+2}}{2}+\right.$$
$$\left.+0,22.\frac{y_{-3}+y_{+3}}{2}+0,10\frac{y_{-4}+y_{+4}}{2}\right\},$$

alors $m=4$. Nous partageons, fig. 3, la base de la figure, c'est à dire AJ, par $2m$-$1=7$ points en $2m=8$ parties, de telle manière que $DE=EF=\frac{0,36\,H}{2}=0,18\,H$, $CD=$
$=FG=\frac{0,32\,H}{2}=0,16\,H$, etc.

(3) Simpson a déjà fait cette observation, voyez: Thomas Simpson, **The Doctrine and Application of Fluxions**, Londres, 1750, I, pag. 199.

(4) Entre autres: $\int f(x)\sqrt{(1+x^2)}\,dx$; $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$;
$\int \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)}}$; etc. aussi pour $x=\sin\Phi$, $\cos\Phi$, etc.

(5) Les ordonnées $y_{\pm(m+1)}$, $y_{\pm(m+2)}$, ... $y_{\pm p}$ peuvent se trouver aussi, soit toutes, soit quelques-unes seulement, entre les ordonnées extrêmes de la figure $A'A$ et $B'B$.

(6) Voyez: Thomas Simpson, **The Doctrine of Annuities and Reversions**; Londres, 1742, Problem XXXI.

---

1) Nous n'avons pas toujours indiqué les sources auxquelles nous avons puisé pour rédiger la Notice historique du Chap. VIII. Dans le § 91 et les §§ suivants, se trouvent quelques fragments empruntés à Cantor: **Vorlesungen**, Eneström: **Bibliotheca**, et d'autres auteurs, sans qu'il en ait été fait mention.

(7) La sensibilité d'un instrument de pesage, une balance par exemple, peut se représenter par une courbe AB, fig. 1, dont, par rapport aux axes $A'X$ et $A'Y''$, l'abscisse d'un point de cette courbe représente la charge P et l'ordonnée de ce point la sensibilité de l'instrument pour la charge P. Il est évident que l'équation de la parabole qui se confond approximativement avec la ligne AB pourra s'obtenir le plus exactement au moyen de quelques pesées si les charges employées et intermédiaires entre $P = 0$ et $P =$ charge maximum vont croissant dans la même proportion que la longueur des abscisses suivant Gauss.

(8) J. F. Encke. Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen, Berlin, 1888, I, pag. 124.

(9) Voyez la table C, pour $n = 3 : 0{,}5 - 0{,}3873 =$ $= 0{,}1127 = \pm \frac{1}{9}$.

(10) Les premiers hommes inscrivaient sur la pierre au moyen d'hiéroglyphes les principes des connaissances dont les prêtres égyptiens et les Chaldéens faisaient mystère. Lesparat: Métrologies constitutionnelle et primitive comparées entre elles. Paris, 1801, Tome second, pag. 53.

(11) Chasles: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne. Bruxelles, 1837, 1er Chap. § 46 et 2ième Chap. § 1. Id. Paris, 1875, pag. 487—488.

(12) Ce n'est que depuis le commencement du XVIIIième siècle que le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est indiqué par la lettre grecque π. Très probablement la première fois par William Jones, dans un ouvrage imprimé à Londres en 1706. Voyez: Bibliotheca mathematica; Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. Eneström, Stockholm, 1889, pag. 28 et 1894, pag. 106.

(13) Dr. A. Eisenlohr: Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des

British Museum) Leipzig, 1877, I, Commentar, pag. 124 et 177 [1]).

On trouve dans ce papyrus — qui a été la propriété de l'anglais Rhind, mais qui, à présent, est gardé au British Museum — la solution d'un grand nombre de questions de géométrie pratique, telles que le mesurage de terrains et de solides (cubes, cylindres, cônes et pyramides), la division de figures, etc. Cependant le papyrus ne contient aucune démonstration des formules fondamentales, de sorte que l'on peut en conclure qu'en 1700 avant Jésus-Christ le rapport entre l'aire d'un cercle et celle d'un carré construit sur son diamètre était déjà connu depuis longtemps.

Quoique ce papyrus nous donne la première expression connue jusqu'à présent pour l'aire approximative du cercle, cela ne nous prouve nullement que cette expression n'ait pas été trouvée un grand nombre de siècles auparavant. Qui dira pendant combien de temps on s'est servi de cette expression avant qu'elle fût recueillie dans le papyrus? La date du document qui en fait mention pour la première fois ne peut être considérée comme la date de sa découverte.

Et il est très probable que l'archéologie, qui pénètre de plus en plus dans le passé, trouvera des centres de civilisation plus anciens et plus développés encore que l'Egypte 17 siècles avant Jésus-Christ.

Les premières tentatives pour découvrir le rapport entre l'aire d'une figure limitée par des lignes droites et celle d'un carré pris comme unité de surface, ne peuvent pas être beaucoup plus anciennes que celles pour découvrir un rapport approximatif de l'aire d'un cercle à l'aire du carré de son diamètre. Il est permis de supposer que la recherche de la quadrature du cercle se perd dans l'antiquité la plus reculée.

(14) Les fouilles faites en Perse et à Babylone et exécutées sous les auspices des gouvernements français et allemand, ont

---

1) Voyez (note (18)) Hoefer: Histoire etc., pag. 68.

fait connaître une civilisation éteinte depuis plus de 50 siècles [1]). Les anciens Grecs ne datent que d'hier.

La chronologie des Pharaons nous ramène déjà à quarante siècles avant Jésus-Christ. Et on sait qu'il y a peu de temps on a retrouvé les 282 articles de la loi divine que le Moïse babylonien, le héros puissant, le sage prince Hammurabi, 1000 ans environ avant la législation du Sinaï, reçut du Dieu-Soleil Samas en personne, qui les avait écrits de sa propre main pour les communiquer au peuple babylonien.

Ces articles de loi témoignent d'une haute civilisation, et, pour la profondeur et la finesse de la pensée, la concision, la clarté de l'expression, beaucoup d'entre eux ne sont point inférieurs aux meilleurs articles de loi appliqués à présent dans les pays les plus civilisés [2]).

---

1) Il n'y a guère plus de soixante années que le premier coup de pioche a été donné en Mésopotamie pour remettre au jour les vestiges d'une civilisation enfouis depuis des milliers d'années sous la poussière et le sable. Ce fut entre 1840 et 1850 environ que, sous la direction du consul français Emile Botha, on a déterré, près des ruines de Ninive, les nombreux débris du palais de Sargon, le roi de l'Assyrie.

Les ruines découvertes dans ce court espace de temps ont déjà fourni une multitude énorme de documents et d'objets d'art qui, rapprochés des découvertes faites sur la terre égyptienne, ont changé complètement les idées que nous avions sur le développement de la civilisation. Des époques comme celles comprises entre 4000 et 3000 ans avant Jésus-Christ, pendant lesquelles on pouvait supposer que l'humanité avait été dans un état de civilisation tout à fait primitif et dont aucun document ne témoignait, nous apparaissent maintenant sous un autre jour. Des monuments portant des inscriptions nous font voir, en détail même, que les peuples anciens avaient atteint un degré de civilisation surprenant, aussi bien dans l'ordre intellectuel que dans l'ordre purement matériel.

2) Voyez Lesparat, Tome second, pag. 55 (1).

La découverte du monument d'Hammurabi, représentant le roi recevant du Dieu-Soleil Samas des lois pour son peuple, est décrite en détail dans la Délégation en Perse; Mémoires publiés sous la direction de J. de Morgan, Tome IV, par B. Scheil.

2250 ans environ avant Jésus-Christ, Hammurabi a uni la Babylonie du Nord à celle du Sud et en a fait ainsi un grand empire. On le trouve cité dans la Genèse: XIV, sous le nom d'Amraphel, comme contemporain d'Abraham.

Voyez aussi: F. Delitzch: Babel und Bibel, Leipzig, 1903, pag. 8 et 9, et id Zweite Vortrag über Babel und Bibel, Stuttgard, 1903, pag. 24—26. Pater Bonus: Zeitschrift für kirchliche Wissenschaft und Praxis, herausgegeben von Domkapitular Dr. P. Einig, Trier, October 1902, etc. Stimmen aus Maria Laach, Katholische Blätter, Freiburg im

Y a-t-il lieu de croire maintenant que les mathématiciens égyptiens les plus habiles, ceux du temps du roi Hammurabi par exemple, n'auraient eu qu'une approximation très peu précise de π, telle que $\pi = 3$, comme l'ont soutenu divers auteurs? Et n'a-t-on pas, beaucoup trop à la légère, prétendu qu'il en fut de même des Israélites, qui vécurent dans la période la plus glorieuse de l'histoire d'Israël, c'est à dire au temps de la construction du temple de Salomon (environ 1000 avant Jésus-Christ)? Et, pour risquer une pareille affirmation, on s'appuyait uniquement sur ce fait que, jusqu'à présent, on n'a trouvé aucun texte ni inscription de ces temps éloignés qui prouvât le contraire. Un simple mesurage direct sur un cylindre fait voir aussitôt que le rapport $\pi = 3$ est trop petit et le moyen arithmétique, tiré d'une dizaine de mesurages sur des cylindres divers, fait connaître une valeur de π, dont la première décimale est certainement exacte et dont la seconde ne différera pas sensiblement de ce qu'elle doit être. Ainsi, suivant moi, il ne faut pas, du manque de preuves définitives, conclure qu'un peuple n'a pas connu une valeur très approchée de π. Je crois au contraire que chaque peuple de l'antiquité ayant atteint une civilisation relativement avancée doit avoir connu une valeur assez exacte de π.

Il me semble même que le fait est prouvé indirectement par les méthodes employées dans la plus haute antiquité par les Chaldéens, les Indiens, les Persans, les Arabes, les Tartares, etc. pour le calcul des éclipses. Ces méthodes sont telles que, même après cinq à six mille ans, ainsi que le fait observer Bailly, pag. 114 de son *Histoire de l'astronomie ancienne*, elles ont donné, pour les deux éclipses de lune observées aux Indes, les 23 décembre 1762 et 30 août 1765, dont parle Legentil, le moment de leur commencement à 22 minutes près, malgré les variations des mouvements moyens du soleil et de la lune, dans un espace de temps

---

Breisgau, 1903, 4e, 5e und 6e Heft, pag. 505, note 1, et 516, règ. 29—31. *Babylon und Christentum* von F. X. Kugler, Freiburg im Breisgau, 1903, Erstes Heft, pag. 3.

aussi considérable. Il faut remarquer, toujours avec Bailly, que pour ces deux éclipses, les Brames ont donné plus exactement le temps de la durée, que les tables de Maier, les plus exactes que nous ayons [1]).

Il est notoire que les anciens prêtres égyptiens savaient prédire les éclipses avec la plus grande exactitude [2]). Il faut donc que la science astronomique qui les a conduits à des résultats aussi étonnants fût aussi développée que celle d'aujourd'hui, au moins pour ce qui concerne les mouvements moyens du soleil et de la lune [3]).

Ainsi, je le répète, on aurait tort de conclure que les peuples anciens qui comptaient tant d'hommes savants, ne connaissaient pas de valeur très approchée de π, encore que des preuves directes n'en puissent pas être données.

(15) B. P. Moors: Le Système des Poids, Mesures et Monnaies des Israélites d'après la Bible. Paris, 1904.

(16) Moritz Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, Leipzig, 1880, pag. 91, 161 et 172—174; Eneström; Bibliotheca, 1902, pag. 7—62 et 342—349; 1903, pag. 13—18 et 118—126.

(17) Eneström: Bibliotheca, 1900, pag. 514.

(18) F. Hoefer: Histoire des mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du 19ème siècle, Paris, 1874, pag. 203—217.

Dr. Heinrich Suter: Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Zürich, 1873, pag. 74—81.

H. G. Zeuthen: Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Kopenhage, 1896, pag. 178—183, et

Eneström: Bibliotheca, pag. 13 et 14.

(19) Dans un ouvrage traduit, en 1270, de l'arabe en

1) Lesparat, Tome II, pag. 78, et F. X. Kugler: Zur Erklärung der Babylonischen Mondtafeln, I (Zeitschrift für Assyriologie XV, pag. 178).

2) Lesparat, II, pag. 85, et Eneström, Bibliotheca, 1901, pag. 156—160.

3) Lesparat, II, pag. 97.

hébreu et, en 1864, par H. Schaper de l'hébreu en allemand et annoté par le Docteur M. Steinschneider, publié dans le Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig, 1880, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, se trouve, à la page 19/20, la règle suivante pour l'aire du cercle: »Multipliez le diamètre par lui-même et »levez de ce produit un septième et un demi-septième, le »reste est égal à l'aire cherchée". Ainsi nous retrouvons ici, quoiqu'il n'y paraisse pas tout d'abord,

$$\pi = \frac{22}{7}, \text{ car } (2r)^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right)(2r)^2 = 4\left(1 - \frac{3}{14}\right)r^2 = \\ = 4 \cdot \frac{11}{14} r^2 = \frac{22}{7} r^2.$$

Voyez aussi Eneström, Bibliotheca, 1902, pag. 259—272.

(20) Chasles, Aperçu etc. Paris, 1875, pag. 487—491.

(21) Bien qu'il soit admis généralement que la valeur approchée $\pi = \sqrt{10}$ nous vient des Hindous, on n'a pas réussi jusqu'à présent à établir avec certitude comment il sont parvenus à cette valeur. Voyez Palestine Exploration Fund. Quarterly Statement, 1899. London, pag. 233.

Voyez pour l'histoire du problème de la quadrature du cercle: Eneström, Bibliotheca: 1893, pag. 53; 1896, pag. 39 et 81; 1900, pag. 269, 270, 271 et 500; 1901, pag. 48 et 224; on y trouve aussi une série de titres d'ouvrages sur ce sujet, publiés depuis peu.

Dans les registres de Cantor, Vorlesungen etc., on trouve, dans chacun des trois volumes dont l'ouvrage se compose, sous la lettre *P*, une série de valeurs approchées de π, avec l'histoire de leur origine; voyez aussi tome II, pag. 544, note, des Vorlesungen etc.

J. Butéon, De Quadratura circuli, Lyon, 1559.

J. E. Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, Paris, 1831 (Ouvrage très apprécié).

Hoefer, Histoire etc. pag. 351.

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl und Dr. M. Cantor, Zeitschrift fur Mathematik und Physik (Historisch-

literarische Abtheilung) Leipzig, 1875, pag. 29.

Dr. S. Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historische Forschung. Erlangen, pag. 72—75 et 101.

H. Schubert, Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen, Hamburg. 1889.

F. Rudio, Archimèdes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung, mit einer Uebersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen. Leipzig, 1892.

Mathematischer Bücherschatz von Dr. Ernst Wölffing. Leipzig, 1903. I. Teil. Reine Mathematik. Quadratur des Kreises et Quadratur.

(22) Ce savant allemand est plus connu sous le nom latinisé de Stiffelius (1486—1567).

(23) Duchesne naquit à Dôle, en France. Cependant il doit être venu très jeune en Hollande, où son nom se changea en celui de Simon Van der Eycke, ou van Eick, latinisé Simonis à Quercu. En 1584, il demeurait à Delft, où il était »privaat docent"; il vivait encore en 1603. Voyez aussi: Nouvelle Biographie Générale par le Dr. Hoefer. Paris, 1855; Biographie Néerlandaise par le Dr. D. Bierens de Haan. Rome, 1883; Cantor, Vorlesungen etc., II, pag. 544, et Eneström, Bibliotheca, 1888, pag. 36.

(24) Suter, Geschichte etc., pag. 171 et Zeuthen, Geschichte etc., pag. 70 et 71.

(25) A. Arneth, Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwickelung des menschlichen Geistes, Stuttgard, 1852, pag. 192 et 223.

(26) Hoefer, Histoire etc., pag. 364, et Eneström, Bibliotheca, 1902, pag. 273—275.

(27) Eneström, Bibliotheca, 1888, pag. 36: 1902, pag. 274, et Cantor, Vorlesungen etc., II, pag. 552.

(28) La distance moyenne de la terre au soleil est de 148 millions de kilomètres ou 148 000 000 000 mètres.

(29) »Le micron est un millième de millimètre. Armé du »microscope le plus puissant qui puisse exister, l'œil sera inca»pable d'apercevoir aucun objet plus petit qu'un dixième de »micron". (Revue des deux mondes, 1 juillet 1902, pag. 216).

(30) Histoire de l'Académie des Sciences, Paris, 1719, pag. 135.

(31) Chasles. Aperçu etc. Paris, 1875, pag. 90.

(32) Chasles. Aperçu etc. Bruxelles, 1837, Chap. 2, § 15.

(33) Christiaan Huygens. Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis et Circuli etc. 1651.

Ordinairement les français écrivent Huyghens, les allemands Huygens, les anglais Hugens; toutes les lettres qu'on possède encore de l'illustre géomètre-physicien hollandais sont signées Hugens. Son véritable nom est tel que nous l'avons écrit ci-dessus.

Voyez aussi: Eneström, Bibliotheca, 1900, pag. 511.

(34) Philosophical Transactions, n^0. 34, et Hoefer, Histoire etc. pag. 452.

(35) Son véritable nom est Kauffmann, dont Mercator est la traduction latine.

(36) Eneström, Bibliotheca, 1900, pag. 90—92 et 1901, pag. 77—85.

(37) Ce traité parut en 1704. Newton l'avait probablement composé avant 1668. Sa Méthode des Fluxions, commencée déjà en 1671, ne vit le jour qu'en 1736, longtemps après sa mort (Encyclopédie méthodique. Mathematiques. Tome II, Paris, 1785, pag. 687; Sir Isaak Newton's Leben nebst einer Darstellung seiner Entdeckungen von Sir David Brewster, übersetzt von Goldberg, Leipzig, 1833, pag. 155, et Cantor, Vorlesungen etc. III, pag. 61).

(38) Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt, Berlin, 1849, 1e Abtheilung, Band I, pag. 133.

(39) James Gregory, dont il est question dans le § 92, était un savant très considéré en Angleterre dans les questions de mathématique.

Dans le numéro du 13 juillet 1668 des Philosophical Transactions, publiées par la Société Royale dont Newton devint président peu de temps après cette date, Gregory contestait une démonstration de Huygens [1]). Il était en correspondance scientifique avec Collins, qui était membre de la Société Royale et il était ami de Newton, Leibniz, Brouncker et d'autres savants célèbres du XVIIème siècle. Il a publié des recherches sur des séries infinies — sujet dont, plusieurs années auparavant, Newton s'était déjà occupé aussi.

La question se présente maintenant de savoir si Newton, lorsqu'il écrivit à Leibniz la lettre du 24 octobre 1676, plus de huit années après la publication des Exercitationes etc. de Gregory, connaissait, de cet auteur, les formules d'approximation que nous avions en vue dans le § 92 cidessus

Il nous paraît fort probable que Newton a lu les ouvrages de Gregory et que ces formules l'ont frappé. Il est à présumer également qu'il en a saisi immédiatement les points défectueux et qu'il les a corrigées et améliorées de façon à en généraliser l'usage.

Tout ceci n'est qu'une hypothèse, mais une hypothèse qui, à nos yeux, a de grandes chances de probabilité. Cependant nous devons ajouter que nous n'avons trouvé nulle part de mot, dont on pût conclure que Newton aurait reçu de Gregory l'idée première de ses formules d'approximation; nulle part nous n'avons pu constater que Newton en ait tiré parti.

(40) Ce principal ouvrage de Newton, le plus beau peut-être qu'ait produit la pensée humaine, a eu plusieurs éditions. Nous en connaissons sept. Ce sont, par ordre de date, les

1) Eneström, Bibliotheca, 1901, pag. 77—85.

suivantes (les quatre premières ont paru du vivant de l'auteur):

la 1re parut à Londres, en 1687; elle fut publiée sur les instances de Halley. (Voyez la Préface de cette édition qu'on retrouve dans l'édition de 1723 et dans celle de 1726);

la 2ième, à Londres en 1713, par les soins de Cotes et aux frais de l'évêque Richard Bentley (voyez le dernier alinéa de la Préface);

la 3ième à Amsterdam, en 1723 (editio ultima). Dans cette édition, on trouve aussi la Methodus differentialis dont nous parlerons plus tard;

la 4ième à Londres, en 1726, par Pemberton (traduite en allemand: Sir Isaac Newton's mathematische Principien der Naturlehre von Prof. Dr. J. Ph. Wolfers, Berlin, 1872);

la 5ième fut faite par Tessanek (traduite en français par la marquise du Châtelet, 1756);

la 6ième parut à Genève en 1760, accompagnée de commentaires par les R. P. Le Seur et Jacquier, et

la 7ième fut publiée à Londres en 1779—1785 par le Dr. Horsley. Cette édition contient aussi tous les autres ouvrages de Newton.

Le célèbre philologue Richard Bentley avait la plus haute estime pour les Principia de son très illustre ami Newton. Il les recommandait souvent dans ses prédications anglaises et latines comme un rempart contre l'impiété et comme une révélation de la magnificence de Dieu (Sir Isaac Newton's Leben etc. de Goldberg, pag. 239 et 240).

(41) Cette proposition se trouve dans l'édition des Principia de 1723, pag. 446; dans celle de 1726, pag. 486; dans celle de 1760, pag. 582, tome III, avec des éclaircissements dans la note 76 à la page 43 du premier volume, et dans la traduction de Wolfers, pag. 467—469.

(42) Cette Methodus differentialis ne se trouve pas dans les éditions des Principia de 1687, 1713 et 1726; elle se trouve bien dans l'édition d'Amsterdam et dans celle de Horsley, tome I; encore, réuni avec plusieurs autres ouvrages de Newton, dans: Isaaci Newtoni, Opuscula

mathematica, philosophica et philologica, publiés par Castellan, Lausanne et Genève, 1744, tome I, pag. 273—282 (Edita Londini 1711)[1].

(43) Voyez le Postscriptum de la Propositio VII dans la De Methodo differentiali Newtoniana de Cotes et la note (39) (qui est applicable en partie aussi à Cotes).

(44) Voyez dans l'édition de 1722 à la page 33 de la Methodo differentiali. Cependant Grunert: Archiv der Mathematik und Physik, tome XIV, pag. 287, fait observer que le traité de Cotes: De Methodo etc. se trouve aussi à la page 86 d'un recueil de divers traités de Cotes publié sous le titre de: Opera miscellanea Rogeri Cotes ou Aestimatio errorum in mixta mathesi, per variationes partiam trianguli plani et sphaerici, auctore Rogero Cotes, Lemgoviae, 1768.

(45) Methodus Differentialis: sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, Londres, 1730.

Maximilien Marie: Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques, Paris, 1883—1888, Tome VII, pag. 265, fait mention de Rome au lieu de Londres et ajoute: »et dont il donna une nouvelle édition, en 1764". Dans l'œuvre de Stirling que j'ai sous la main et que je cite, on trouve sur le frontispice la mention »imprimée à Londres en 1730" par Gul. Bowyer (Voyez Eneström, Bibliotheca, 1886, pag. 43).

(46) Voyez concernant les termes auxiliaires que donne Stirling:

Archiv der Mathematik und Physik von Grunert, Theil XIV, art. XX, §§ 1 et 13, et

R. Lobatto: Lessen over Integraal-Rekening, La Haye, 1852, §§ 198 et 199.

(47) MacLaurin's: Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries, Londres, 1748,

1) Voyez Eneström, Bibliotheca, 1893, pag. 90/91.

publié par Patrick Murdoch (mort en 1774). Une biographie de MacLaurin par Murdoch, qui était son élève et ami, précède l'ouvrage. Une seconde édition fut publiée en 1750. Il existe une traduction de l'ouvrage de 1748: Exposition des Découvertes philosophiques de Newton, traduit de l'anglais par Lavirotte, Paris, 1749, pag. xxvj. Dans cette étude, nous ne citons pas l'ouvrage original mais seulement cette traduction.

(48) Les chiffres entre parenthèses ( ) correspondent avec ceux des formules développées dans cette étude.

(49) Dans l'art. 849, MacLaurin déduit la formule pour 5 ordonnées, laquelle, sans les termes de correction, est appelée d'après Cotes. MacLaurin trace premièrement, comme nous l'avons fait dans le § 74, une ligne parabolique par les sommets des ordonnées y_1, y_3 et y_5 et trouve pour I' la valeur que nous avons trouvée sub (120). Il trace ensuite une parabole par les sommets des ordonnées y_1, y_2 et y_3, et une parabole par les sommets des ordonnées y_3, y_4 et y_4, et il additionne ensemble les aires des deux moitiés de la figure obtenue ainsi. De cette manière, il trouve pour I une seconde expression qu'il donne à la fin de l'art. 849. Mais MacLaurin y a fait une faute de calcul qui lui fait trouver l'aire

$$AFfa = \frac{7A + 32B + 12C}{90} . R - \frac{31 R^6 \zeta}{6 \times 16 \times 16 \times 30240} + \dots$$

dont le dernier terme est inexact.

Il existe une traduction du Treatise of fluxions: Traité des fluxions, par Pezenas, Paris, 1749. Les paragraphes portent le même chiffre que dans l'original. La faute de calcul dont nous venons de parler n'est pas corrigée dans l'art. 849, tome II, de cette traduction.

(50) Reif, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, 1889, pag. 87, dit: »Auparavant Euler avait donné »la même formule d'approximation dans les Commentarii Pe»tropolitani de l'année 1732 (publiés en 1738), et il est »possible que MacLaurin ait connu cette publication. Ceci »cependant serait en contradiction avec le scrupule extrême

»avec lequel, en d'autres cas, il cite les résultats d'autrui, en »sorte que je crois pouvoir dire que MacLaurin a trouvé »cette formule indépendamment d'Euler, qui lui aussi, de son »côté, doit en être regardé comme l'auteur. Ainsi il serait »peut-être juste d'unir les deux noms et d'appeler la formule »d'approximation: formule d'Euler et MacLaurin. D'autant »plus que déjà les deux noms sont parfois employés; Schlö»milch appelle la formule d'après MacLaurin, Jordan (Cours »d'Analyse, II, pag. 99), d'après Euler".

Cantor, Vorlesungen etc. III, pag. 663, ne croit nullement que MacLaurin ait connu la formule sub (114) avant l'impression de son Treatise.

(51) Oskar Schlömilch: Vorlesungen über einzelnen Theile der Höheren Analysis, Braunschweig, 1866, pag. 226 (ou 1895, pag. 231) dit: »Sans faire attention au »reste, cette formule a été développée d'abord par MacLaurin »dans le Treatise on fluxions (Lond. 1742) et donnée »ensuite par Euler dans l'Instit. calc. differ. *P.* I, »cap. 5." Cependant la formule dont il est question ici ne se trouve pas à l'endroit indiqué par Schlömilch. On trouve la formule d'Euler développée ci-dessus sub (106) dans son Institutionibus Calculi integralis, tome I, cap. VII, publié à Saint-Pétersbourg en 1768; il en existe une traduction: Leonhard Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung. Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt von Joseph Salomon, Wien, 1828—1830. Voyez cette traduction pag. 181.

L'assertion de Schlömilch est certainement inexacte. La formule qu'il a en vue se trouve au tome VI des Comment. Petropol. qui ont été publiés en 1738, tandis que le Treatise paraissait peut-être à la fin de 1742 ou, ce qui est plus probable, au commencement de 1743.

J. Bertrand: Traité de Calcul Intégral, Paris, 1878, pag. 344.

(52) Lavirotte: Exposition etc., pag. xlij. »Mais son »grand ouvrage, celui qui lui a coûté le plus de peine est »son Traité des fluxions, pag. xliij." Cet ouvrage lui »a coûté des peines infinies."

(53) Lavirotte: Exposition etc., pag. xIj. On trouve cette longue pièce à la page 247 et les suivantes de la 6ième édition des Principia de Newton (de 1760). En effet il est étonnant que MacLaurin ait pu composer en dix jours seulement cette pièce, avec ses figures nombreuses et compliquées. On aurait, en travaillant sans arrêt, de la peine à copier seulement la pièce en un temps si court.

On trouve aussi, à la page 283 de l'édition des Principia, que nous venons de mentionner, une pièce d'Euler concernant le même sujet.

(54) On ne trouve pas la phrase indiquée dans la traduction de Pezenas.

(55) Lavirotte: Exposition etc. pag. xxiv: »Malgré la »multitude de ses occupations et les fréquents obstacles qu'il »rencontrait, il ne discontinua pas de suivre ses études particu»lières avec la plus grande assiduité, lisant tout ce qui paraissait »de nouveau, dès qu'il pouvait en attendre quelque avantage."

(56) La note à la page 632 des Phil. Transact. dit: »Ce rapport très scientifique et magistral fut composé proba»blement par l'excellent auteur lui-même."

Le tome VII des Comment. Petropol. fut imprimé en 1740 et le tome VIII en 1741. Cependant, il est très vraisemblable que la démonstration de la formule (114) donnée par Euler dans le tome VIII, ainsi que cela a été le cas avec la formule elle-même au tome VI, a été connue en Angleterre longtemps avant la publication du tome VIII et qu'elle fut communiquée en 1736 déjà à Stirling et à d'autres.

En effet Euler a beaucoup écrit; il ne se bornait pas à communiquer ses découvertes à ses amis, il était encore très disposé à faire connaître ce qu'il avait trouvé à ceux qui s'intéressaient à ses travaux et cela même avant l'impression. Aussi, la plus grande partie de ce qu'il a composé n'a jamais été imprimée. Une édition complète in quarto de toutes ses œuvres comporterait 2000 feuilles au moins. On voit clairement dans ses écrits son inclination à confier au public des essais qui n'étaient pas encore définitifs; probablement qu'il travaillait

beaucoup plus pour la science que dans le désir de la gloire [1]).

Quoi qu'il en soit, il est difficile de croire qu'en 1742—1743 encore MacLaurin n'ait pas connu les tomes VI et VIII (mais spécialement le tome VI) des Comment. Petropol., tandis qu'avant ce temps il a bien étudié les tomes I—V et VII et s'en est servi largement.

(57) MacLaurin était membre de la Royal Society. Sans doute il lisait régulièrement les Phil. Transact., probablement même avant qu'elles ne fussent imprimées. Son nom se trouve plusieurs fois parmi les noms d'auteurs dans le vol. VIII, entre autre presque directement après le rapport dont il est question dans la note précédente, notamment aux pages 675 et 709.

(58) Cette raison ne semble pas bien claire; l'expression fournit matière à discussion.

(59) Voyez les Phil. Transact. nos. 436 et 439; Cantor: Vorlesungen etc. III, pag. 761—766, et Eneström, Bibliotheca, 1902, pag. 145.

(60) Cantor, Vorlesungen etc. III, pag. 548, 562 et 568.

(61) »Il fut lu devant la Royal Society en Mars ou »Avril 1741, et aurait été imprimé dans les Philosophi»cal Transactions, si je n'avais désiré le contraire." Trad. de l'orig.

(62) Voyez aussi Lacroix: Traité du Calc. diff. et du Calc. int. Paris, 1814, tome II, arts. 467—473, pag. 138.

(63) Carl Friedrich Gauss Werke, Dritter Band, Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttungen, 1866.

Les données suivantes, dans l'ouvrage de Gauss que nous venons de mentionner peuvent être corrigées ainsi:

$$\text{pag. } 170. \; n = 5: -\frac{11}{52500} \text{ et } n = 8: \frac{37}{1730\ 1504}.$$

Ces fautes d'impression ne se trouvent pas dans l'ouvrage original: Commentationes societas regiae scientiarum Gottingensis. Vol. III, 1816.

1) Cantor: Vorlesungen etc. III, pag. 532.

(64) Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen von J. F. Encke, Erster Band, Berlin, 1888, pag. 101 et 102.

(65) Probablement que Encke a en vue ici les inconvénients attachés à l'usage des formules de Gauss, dont on a parlé amplement dans le § 37 de cette étude. Voyez aussi Jordan: Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1883, tome II, § 106.

(66) Voyez: Maxim. Marie, Histoire etc., tome XI, pag. 109, 110 et 138.

(67) Voyez entre autre: Dirksen, Ueber die Methoden, den Werth eines bestimmten Integrals näherungsweise zu bestimmen, Berlin, 1832.

Schellbach dans le tome XVI, 1836, pag. 192. du Journal de Crelle.

J. A. Grunert: Archiv der Mathematik und Physik, tome XIV, 1850, art, XX, § 14.

E. Heine: Anwendungen der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen, Berlin, 1881, tome II.

J. F. Encke: Gesammelte etc., pag. 100.

(68) Voyez aussi le vol. 63, pag. 152—157, du même Journal;

R. Radau: Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome VI, année 1880, pag. 297.

(69) Voyez le Journal de Mathématiques pures et appliquées, deuxième série, tome XIX, année 1874, pag. 19: Sur les Quadratures, par M. P. Tchebichef.

(70) On a beaucoup écrit sur ce sujet; on trouve sur cette matière des articles dans presque tous les périodiques qui s'occupent des hautes mathématiques.

(71) Soit à cause de son exactitude plus grande, ou du calcul plus facile, soit parce que les coordonnées de certains points de la courbe limite sont déjà connues, ou doivent être recueillies dans le calcul; etc.

